

Мирјана Чангаловић  
Весна Манојловић  
Владимир Балтић

**ДИСКРЕТНЕ  
МАТЕМАТИЧКЕ  
СТРУКТУРЕ**

Факултет организационих наука

Б Е О Г Р А Д    2009.

Аутори: *др Мирјана Чангаловић,*  
*др Весна Манојловић,*  
*мр Владимир Балтић,*

ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТРУКТУРЕ

Издавач: Факултет организационих наука,  
Београд, Јове Илића 154

Рецензенти: *др Вера Вујчић*  
*др Слободан Дајовић*

Цртежи и слог: *аутори*

CIP – Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

51-74:004(075.8)

ЧАНГАЛОВИЋ, Мирјана, 1954–  
Дискретне математичке структуре / Мирјана  
Чангаловић, Весна Манојловић, Владимир  
Балтић. – Београд : Факултет организационих  
наука, 2009 (Смедерево : Newpress). – 182 стр. :  
граф. прикази, табеле ; 24 cm. –

Тираж 300. – Библиографија: стр. 181-182.

ISBN 978–86–7680–185–5

1. Манојловић, Весна, 1974– [аутор]

2. Балтић, Владимир, 1973– [аутор]

а) Дискретна математика

COBISS.SR-ID 167436812

ISBN: 978–86–7680–185–5

Факултет организационих наука, 2009.

Тираж: 300 примерака

Штампа: Newpress, Смедерево

# Садржај

<b>ПРЕДГОВОР</b>	<b>5</b>
<b>1. УВОД</b>	<b>7</b>
1.1. Скупови . . . . .	7
1.2. Релације и функције . . . . .	9
1.3. Операције . . . . .	12
<b>2. ИСКАЗНИ РАЧУН</b>	<b>15</b>
2.1. Интуитивна логика . . . . .	15
2.2. Исказна алгебра . . . . .	18
2.3. Семантичке последице . . . . .	22
2.4. Нормалне форме . . . . .	24
2.5. Булове функције . . . . .	25
2.6. Доказивање скуповних релација . . . . .	28
2.7. Прекидачке мреже . . . . .	29
<b>3. ПРЕДИКАТСКИ РАЧУН</b>	<b>31</b>
3.1. Предикати . . . . .	31
3.2. Језик и формуле предикатског рачуна . . . . .	33
3.3. Појављивања променљивих у предикатској формули . . . . .	37
3.4. Интерпретација и вредност предикатске формуле . . . . .	38
3.5. Ваљане формуле . . . . .	43
<b>4. РЕЛАЦИЈСКЕ СТРУКТУРЕ</b>	<b>45</b>
4.1. Основне особине бинарних релација . . . . .	45
4.2. Представљање релација . . . . .	47
4.3. Релације еквиваленције . . . . .	52
4.4. Уређени скупови . . . . .	57
<b>5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ ГРАФОВА</b>	<b>67</b>
5.1. Увод . . . . .	67
5.2. Основни појмови . . . . .	70
5.3. Тврђења о степенима чворова . . . . .	80
5.4. Представљање графова . . . . .	84
Матрица суседства графа . . . . .	84
Листе суседства чворова графа . . . . .	87

---

Матрица инциденције чворова и грана . . . . .	88
Матрица растојања графа . . . . .	90
5.5. Ојлерови графови . . . . .	94
5.6. Хамилтонови графови . . . . .	98
5.7. Стабла . . . . .	101
5.8. Коренска стабла . . . . .	104
5.9. Примене бинарних стабала . . . . .	110
Приказивање алгебарских формула . . . . .	110
Бинарно стабло претраживања . . . . .	112
Стабла кодирања . . . . .	113
<b>6. КОНАЧНЕ МАШИНЕ</b>	<b>119</b>
6.1. Основни појмови . . . . .	119
6.2. Неке примене коначних машина . . . . .	123
6.3. Коначни аутомати . . . . .	130
6.4. Минимизација аутомата . . . . .	136
6.5. Комбиновање аутомата . . . . .	143
6.6. Недетерминистички аутомати . . . . .	146
<b>7. ФОРМАЛНИ ЈЕЗИЦИ И ГРАМАТИКЕ</b>	<b>153</b>
7.1. Основни појмови . . . . .	153
7.2. Језик генерисан граматиком . . . . .	157
7.3. Класификација граматика и језика . . . . .	161
7.4. Регуларне граматике и коначни аутомати . . . . .	164
<b>8. ТЈУРИНГОВА МАШИНА</b>	<b>169</b>
8.1. Дефиниција Тјурингове машине . . . . .	170
8.2. Тјурингова машина и препознавање језика . . . . .	174
8.3. Тјурингова машина и појам алгоритма . . . . .	179
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>181</b>

# Предговор

Дискретна математика обухвата читав низ разнородних математичких области чији су предмет изучавања модели и методе дефинисани на коначним или пребројивим скуповима. Она има велику примену у инжењерским дисциплинама, а посебно у рачунарским наукама, где представља њихову математичку основу.

Књига која је пред вама посвећена је неким од најпримењенијих области дискретне математике и написана је, пре свега, на основу садржаја истоименог предмета, чију наставу аутори реализују на II години основних студија Смера за информационе системе и технологије Факултета организационих наука у Београду. Књига је настала као резултат вишегодишњег искуства у раду са студентима и треба да им, као одговарајући уџбеник, олакша праћење наставе и омогући темељнију припрему испита. Њен садржај одговара стандардним програмима предмета из области Дискретне математике, који се, према препорукама АСМ (*The Association for Computing Machinery*) *Computing Curricula*, изводе, као обавезни, на већини факултета информатике и рачунарства у свету. Књига је подељена на следећих осам поглавља.

Прво поглавље књиге подсећа читаоца на неке основне математичке појмове, неопходне за праћење и разумевање даље тематике ове књиге. То су појам скупа, релације, функције и операције.

Друга и трећа глава посвећене су класичној Математичкој логици. У другој глави дају се основе исказног рачуна и неке од његових примена, док се у трећој глави разматра предикатски рачун I реда, са посебним освртом на формално одређивање истинитосне вредности предиката.

Четврта глава се бави релацијским структурама, тј. скуповима у које су уведене релације над њиховим елементима. Специјално се излажу особине скупова који су уређени релацијама поретка, као и скупова на којима су дефинисане релације еквиваленције.

У петој глави дати су елементи Теорије графова. Обрађени су појмови оријентисаног и неоријентисаног графа и дискутоване неке од њихових особина. Посебно је разматрана једна специјална класа графова, тзв. стабла, и указано је на могућност њихове примене у рачунарству.

Шеста, седма и осма глава описују неке класе математичких „машина“ и језике које оне препознају. У шестој глави формално се дефинише појам коначне машине, као и њена врло важна специјална врста - коначан аутомат, и указује на њихово коришћење при приказивању рада неких процедура у рачунару. Седма глава разматра формалне језике и њихову класификацију по Чомском, успостављајући везу између коначних аутомата и специјалне врсте језика коју они препознају. Најзад, осма глава представља концепт најмоћније од свих до сада дефинисаних апстрактних „математичких“ машина, тзв. Тјурингове машине, која је уско везана за општи појам алгоритма, па зато има изузетан теоријски значај у рачунарским наукама.

Аутори су написали делове ове књиге на следећи начин:

- Весна Манојовић је написала Главе 1, 2 и 3, као и Поглавље 4.4.
- Владимир Балтић је написао Поглавља 4.1, 4.2, 4.3 и Главу 5, нацртао све слике и извршио финалну припрему целог текста за штампу.
- Мирјана Чангаловић је написала Главе 6, 7 и 8.

Обзиром на профил стручњака чијем је образовању овај уџбеник намењен, у њему се не улази дубље у теоријска разматрања области које се презентују. Зато је овде већина теорема дата без доказа, али је, с друге стране, велика пажња посвећена презентирању одговарајућих илустративних примера за већину формално дефинисаних појмова, као и указивању на њихове примене.

Иако је књига, пре свега, намењена студентима Факултета организационих наука, надамо се да она у некој мери може да буде корисна и инжењерима осталих профила, као и свима онима који се баве рачунарством.

Већина цртежа у књизи је нацртана помоћу пакета *WinGCLC* аутора Предрага Јаничића, који се може наћи на адреси

<http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic/gclc/index.html>

Аутори најлепше захваљују рецензентима др Вери Вујчић и др Слободану Дајовићу, редовним професорима Факултета организационих наука, на њиховим коментарима и корисним сугестијама, чиме су допринели да књига буде квалитетнија. Нашу захвалност дугујемо Ивану Огњановићу који је откуцао један део текста, као и Милошу Којашевићу на разрешењу неких језичких недоумица.

Унапред смо захвални на корисним сугестијама, примедбама и указивању на грешке свима онима који буду ову књигу користили.

Београд, мај 2009.

Аутори