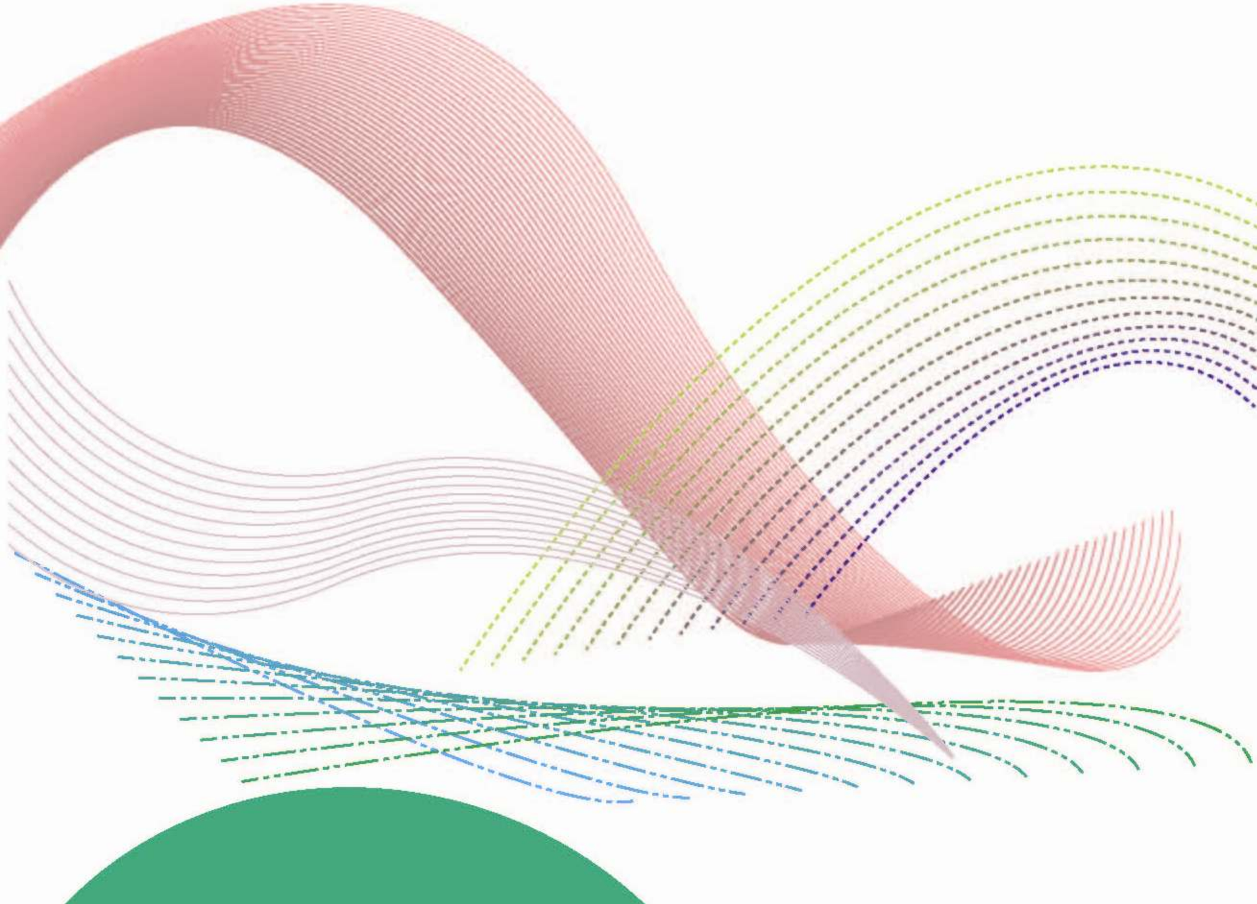
Драган Ђорић

Раде Лазовић

МАТЕМАТИКА 1



М А Т Е М А Т И К А 1

Н о в и у џ б е н и к

Рукопис је писан јасним језиком и одликује га чињеница да су све основне тврдње доказане. Да би читање текста студентима било олакшано, сложенији докази неких теорема које не представљају обавезни део курса, пребачени су у Додатке одговарајућих глава.

Проф Вера Вујчић (из рецензије)

- Књига садржи све теме (видети Садржај) које се раде на предавањима из предмета Математика 1 и има за циљ да студентима ФОН-а олакша спремање усменог испита из тог предмета.

- У књизи се могу наћи формулације свих појмова који се траже на усменом испиту или усменом колоквијуму, као и формулације и докази свих теорема које су предвиђене за усмени. Књига садржи укупно 112 дефиниција и 114 теорема.

- Текст сваке теме у књизи је илустрован бројним примерима (укупно 170 решених примера) и сликама (укупно 58 слика) који омогућавају лакше савладавање градива. За неке примере дата су и решења добијена софтверским пакетом МАТЛАБ, при чему је конкретним кодом указано како се програм користи.

- За сваку тему је написано и посебно поглавље Питања и задаци који су у вези са изложеним градивом, што такође студентима треба да олакша савладавање основних појмова и тврђења (укупно 327 питања и задатака).

- Свака тема садржи и посебно поглавље Додатак где су издвојени докази тежих теорема и где су дате и неке додатне информације у вези са темом (11 дефиниција, 10 теорема, 10 решених примера и 9 слика).

- У сваком Додатку су дате и неке историјске напомене у вези појмова, резултата, као и занимљивих детаља из биографија најзначајнијих математичара за области које се излажу у књизи (заступљена су 23 математичара).

Садржај

Индекс појмова

Глава 4

Векторски простори

Појам векторског или линеарног простора је један од важних појмова у математици. Он омогућава да се разни скупови, независно од природе њихових елемената, могу проучавати са заједничког становишта у односу на уведене линеарне операције.

4.1 Дефиниција векторског простора

Нека је V непразан скуп, нека је K поље и нека су $+ : V^2 \to V$ и $\cdot : K \times V \to V$ бинарне операције.

Дефиниција 4.1. *Алгебарска структура* $(V, K, +, \cdot)$ *је векторски или линеарни простор ако је:*

1. $(V, +)$ *Абелова група,*
2. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,
3. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,
4. $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,
5. $1 \cdot x = x$

за све $x, y \in V$ *и све* $\alpha, \beta \in K$. *Елементи скупа* V *су вектори, а елементи скупа* K *скалари. Ако је* $K = \mathbb{R}$, *векторски простор је реалан, а ако је* $K = \mathbb{C}$, *векторски простор је комплексан.*

Операцију $+$ често називамо *сабирање вектора*, а операцију $\cdot$ *множење* вектора скаларом. Неутрални елемент у операцији сабирања (у ознаци 0) је нулти вектор, док је $-x$ супротан елемент вектора x. Често се векторски простор означава само са V, а операција $\alpha \cdot x$ са αx.

Пример **4.1.** *Лако се проверава да елементи скупа* V *и поља* K *са операцијама* $+$ *и* $\cdot$ *испуњавају услове 1.-5. из Дефиниције 4.1 ако је:*

1. $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, *а* $+$ *и* $\cdot$ *су стандардне операције у* $\mathbb{C}$*;*

2. $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$, *а* $+$ *и* $\cdot$ *су дефинисани са*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots . y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

За векторски простор $\mathbb{R}^n$ *користи се и назив линеарни аритметички простор;*

3. $V = \mathcal{P}_{\leq n}$ *(скуп свих полинома степена не већег од* n*),* $K = \mathbb{R}$, *а* $+$ *и* $\cdot$ *су сабирање полинома и множење полинома реалним бројем;*

4. $V = M_{m \times n}$ *(скуп свих реалних матрица типа* $m \times n$*),* $K = \mathbb{R}$, *а* $+$ *и* $\cdot$ *су операције сабирања матрица и множења матрице реалним бројем;*

5. $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(скуп свих функција* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*),* $K = \mathbb{R}$, *а* $+$ *и* $\cdot$ *су дате са*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Дакле, у свим наведеним случајевима структура $(V, K, +, \cdot)$ *је векторски простор.*

Помоћу датих вектора из V може да се генерише нови вектор.

Дефиниција 4.2. *Линеарна комбинација вектора* $x_1, \ldots, x_n$ *из* V *је вектор*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

где су $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *скалари из* K*.*

На пример, у простору $\mathbb{R}^3$ линеарна комбинација $2x + 3y$ вектора $x = (3, -1, 2)$ и $y = (-1, 0, 1)$ је вектор $z = (3, -2, 7)$.

Дефиниција 4.3. *Скуп свих линеарних комбинација вектора* $x_1, \ldots, x_n$ *датог скупа* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *је линеарни омотач или линеал над* X *и означава се са* $L(X)$*.*

Дакле,

$$L(X) = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}.$$

За скуп X кажемо да је *генераторски скуп* за $L(X)$ или да генерише $L(X)$.

4.2 Линеарна зависност и независност вектора

Дефиниција 4.4. *Вектори $x_1, \dots, x_n$ векторског простора V су линеарно зависни ако постоје скалари $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из K, од којих је бар један различит од нуле и за које важи*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0. \tag{4.1}$$

У противном, вектори $x_1, \dots, x_n$ су линеарно независни.

Другим речима, вектори $x_1, \dots, x_n$ су линеарно независни ако је једнакост (4.1) могућа само за $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. За скуп вектора се каже да је линеарно зависан или независан према томе да ли су вектори тог скупа линеарно зависни или независни. Очигледно је да је скуп вектора који садржи нула вектор линеарно зависан. Такође, ако су $x_1, \dots, x_n$ линеарно зависни вектори датог векторског простора, онда су и $x_1, \dots, x_n, x$ линеарно зависни за произвољан вектор x тог простора.

Пример **4.2.** *Вектори $x = (2, -1, 3, 4)$, $y = (1, 0, 1, -1)$, $z = (1, -1, 2, 5)$ векторског простора $\mathbb{R}^4$ су линеарно зависни јер је $1 \cdot x - 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0$.*

Пример **4.3.** *Полиноми $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ и $p_3(x) = x^2$, као елементи векторског простора $\mathcal{P}_{\leq 2}$, су линеарно независни. Наиме, из једнакости $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0$ следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.*

Пример **4.4.** *Функције $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \cos 2x$ $f_3 : x \mapsto \cos 3x$, као елементи векторског простора $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$, су линеарно независни вектори тог простора. То можемо показати тако што докажемо да из једнакости $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$ (која важи за свако $x \in R$) следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Диференцирањем израза $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ два пута, а затим још два пута, добијамо једнакости*

$$\alpha_1 \cos x + 4\alpha_2 \cos 2x + 9\alpha_3 \cos 3x = 0, \quad \alpha_1 \cos x + 16\alpha_2 \cos 2x + 81\alpha_3 \cos 3x = 0.$$

Специјално, за $x = 0$ имамо једнакости

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1 + 4\beta_1 + 9\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 + 16\alpha_2 + 81\alpha_3 = 0$$

из којих следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Теорема 4.1. *Вектори $x_1, \dots, x_n$ су линеарно зависни ако и само ако је један од њих линеарна комбинација осталих вектора.*

Доказ. Ако су вектори линеарно зависни, тада у њиховој линеарној комбинацији је бар један скалар различит од нуле. Вектор уз тај скалар је линеарна комбинација осталих.

Обратно, ако је један од њих линеарна комбинација осталих, онда је линеарна комбинација свих вектора једнака нули, а један скалар је једнак 1 (различит од нуле). ■

На пример, полином $q(x) = 2x + 3$ и полиноми p_1 и p_2 (Пример 4.3) векторског простора $\mathcal{P}_{\leq 2}$ су линеарно зависни јер је $q = 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_1$.

Дефиниција 4.5. *Бесконачно много вектора су линеарно независни ако је сваки њихов коначан подскуп линеарно независан. У противном, вектори су линеарно зависни.*

Теорема 4.2. *Ако је сваки од вектора $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линеарна комбинација вектора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и ако је $m > n$, тада су вектори $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линеарно зависни.*

Доказ. Теорема се може доказати индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. Ако претпоставимо да је тврђење теореме тачно за неких $n - 1$ вектора, онда треба доказати да оно важи и за свих n вектора. Нека је

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Могућа су два случаја.

1. Сви коефицијенти $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ су једнаки нули. Тада су вектори $y_1, y_2, \ldots, y_m$ линеарне комбинације $n - 1$ вектора $x_2, \ldots, x_n$. Према индукцијској хипотези они су линеарно зависни.

2. Бар један од коефицијената $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ је различит од нуле. Не смањујући општост, можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$. Тада је сваки од $m - 1$ вектора

$$y_2' = y_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1, \ldots, y_m' = y_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}y_1$$

линеарна комбинација $n - 1$ вектора $x_2, \ldots, x_n$ (проверите!). Обзиром да је $m - 1 > n - 1$, према индукцијској претпоставци они су линеарно зависни. Дакле, постоје скалари $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$, који нису сви једнаки нули и за које је

$$\lambda_2 y_2' + \cdots + \lambda_m y_m' = 0,$$

односно

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m = 0,$$

где је

$$\lambda_1 = -\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\lambda_2 + \cdots + \frac{a_{m1}}{a_{11}}\lambda_m\right).$$

Пошто је бар један од скалара $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ различит од нуле, вектори $y_1, y_2, \ldots, y_m$ су линеарно зависни. ■

4.3 База и димензија векторског простора

У векторском простору су посебно важни скупови вектора чије линеарне комбинације генеришу цео простор.

Дефиниција 4.6. *База $\mathcal{B}$ векторског простора V је уређен скуп линеарно независних вектора из V за које је $L(\mathcal{B}) = V$.*

Из ове дефиниције произилази да се сваки вектор из V може изразити као линеарна комбинација вектора базе.

Пример **4.5.**

Једна база простора $\mathbb{R}^n$ је $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где је

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Заиста, вектори скупа $\mathcal{B}$ су линеарно независни и сваки вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\mathbb{R}^n$ је линеарна комбинација вектора из $\mathcal{B}$ јер је

$$\begin{aligned} a &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_n) \\ &= a_1(1, 0, \ldots, 0) + a_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n. \end{aligned}$$

Пример **4.6.** *Полиноми $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ и $p_3(x) = x^2$ чине базу векторског простора $\mathcal{P}_{\leq 2}$ јер су линеарно независни и при томе је*

$$p = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3$$

за произвољан полином $p(x) = a + bx + cx^2$ из $\mathcal{P}_{\leq 2}$.

Ако у векторском простору V постоји база која садржи коначан број вектора, простор је *коначнодимензионалан.* У противном, простор је *бесконачнодимензионалан.* Ако база векторског простора садржи n елемената, кажемо да је простор n-димензионалан.

Теорема 4.3. *У n-димензионалном векторском простору не постоји више од n линеарно независних вектора.*

Доказ. Нека су $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ произвољни вектори n-димензионалног векторског простора V. Пошто је сваки од њих линеарна комбинација n вектора базе, према Теореми 4.2 они су линеарно зависни. ■

Теорема 4.4. *Сваки скуп од n линеарно независних вектора образује базу n-димензионалног векторског простора V.*

Доказ. Нека су $b_1, \ldots, b_n$ линеарно независни вектори n-димензионалног векторског простора V и нека је x произвољан вектор из V. Тада је, према Теореми 4.2, скуп вектора $x, b_1, \ldots, b_n$ линеарно зависан јер је сваки од њих линеарна комбинација вектора базе. Према томе, важи

$$\lambda x + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$$

за неке скаларе $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ од којих је бар један различит од нуле. Међутим, мора бити $\lambda \neq 0$ јер би у противном сви скалари $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ били једнаки нули (због линеарне независности вектора $b_1, \ldots, b_n$). Тада је

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} b_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} b_n. \blacksquare$$

Из претходне две теореме следи да база коначнодимензионалног векторског простора није јединствена, али је број елемената базе јединствен. На основу те чињенице дефинише се још једна карактеристика векторског простора.

Дефиниција 4.7. *Број елемената базе коначнодимензионалног векторског простора $V \neq \{0\}$ је димензија тог простора и означава се са $dimV$. За $V = \{0\}$ је $dimV = 0$.*

У Примеру 4.5 база векторског простора $\mathbb{R}^n$ има n елемената. Према томе, $dim\mathbb{R}^n = n$. У Примеру 4.6 база векторског простора $\mathcal{P}_{\leq 2}$ има три елемента. То значи да је $dim\mathcal{P}_{\leq 2} = 3$.

Нека је V векторски простор димензије n и нека је $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ једна база тог простора.

Дефиниција 4.8. *Ако је $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ за $x \in V$, скалари $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ су координате вектора x у бази $\mathcal{B}$.*

Теорема 4.5. *Координате сваког вектора коначнодимензионалног векторског простора у датој бази су јединствене.*

Доказ. Нека је V произвољан n-димензионални векторски простор са базом $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Претпоставимо да је

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$$

за неко $x \in V$. Тада је

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0,$$

па, због независности вектора базе, следи

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

односно $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. ■

Ако су $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ координате вектора $x \in V$, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ координате вектора $y \in V$ у истој бази, тада су $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n$ координате вектора λx за $\lambda \in R$, а $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$ координате вектора $x + y$ у тој бази.

Увођењем координата вектора у односу на изабрану базу, сваком вектору $x \in V$ придружује се јединствена уређена n-торка простора $\mathbb{R}^n$. Ово придруживање је обострано једнозначно (бијекција), а операције над векторима из V преносе се на одговарајуће операције над елементима простора $\mathbb{R}^n$. За просторе V и $\mathbb{R}^n$ кажемо да су *изоморфни*. Сваки n-димензионални векторски простор је изоморфан векторском простору $\mathbb{R}^n$.

4.4 Питања и задаци

Појмови. У овој глави су дефинисани појмови: *векторски простор, вектор, скалар, реалан векторски простор, комплексан векторски простор, линеарна комбинација вектора, линеарни омотач (линеал), генераторски скуп, линеарно зависни вектори, линеарно независни вектори, база векторског простора, коначнодимензионални векторски простор, бесконачнодимензионални векторски простор, димензија векторског простора, координате вектора.* Ове појмове треба знати, као и неке примере у којима се они појављују.

1. Да ли је скуп реалних бројева векторски простор ако је сабирање вектора дефинисано као уобичајено сабирање бројева, а множење скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ и вектора $x \in \mathbb{R}$ дефинисано са $\lambda \cdot x = |\lambda| x$?

2. Да ли је скуп полинома датог степена n векторски простор у односу на уобичајено сабирање полинома и множење полинома реалним бројем?

3. Да ли је скуп функција облика $a \cos t + b \sin t$ за $t, a, b \in \mathbb{R}$ векторски простор у односу на уобичајено сабирање функција и множење функције реалним бројем?

Линеарна зависност и независност. За линеарну комбинацију $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ вектора $x_1, \ldots, x_n$ неког векторског простора кажемо да је *нетривијална* ако је бар један од коефицијената $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различит од нуле. Према Дефинцији 4.4 вектори $x_1, \ldots, x_n$ су *линеарно зависни* ако постоји нетривијална линеарна комбинација тих вектора која је једнака нула-вектору. У супротном, вектори $x_1, \ldots, x_n$ су *линеарно независни*.

4. Нека је $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ скуп вектора векторског простора V. Доказати следећа тврђења.

1) Ако $0 \in S$, вектори скупа S су линеарно зависни.

2) Ако скуп S садржи линеарно зависан подскуп, вектори скупа S су линеарно зависни.

3) Ако су вектори скупа S линеарно независни, тада су вектори сваког његовог подскупа такође линеарно независни.

5. Испитати линеарну зависност вектора $a = (1, 3, 4)$, $b = (3, 3, 2)$ и $c = (8, 1, 3)$ у простору $\mathbb{R}^3$.

6. Доказати да су $x_1 = (1, 2, 0, 4)$, $x_2 = (-1, 0, 5, 1)$, $x_3 = (1, 6, 10, 14)$ линеарно зависни вектори простора $\mathbb{R}^4$, а затим навести бар једну нетривијалну линеарну комбинацију вектора x_1, x_2, x_3 која је једнака нула-вектору.

7. Доказати да су функције $f_1 : x \mapsto \sin x$, $f_2 : x \mapsto \sin 2x$ $f_3 : x \mapsto \sin 3x$, као елементи векторског простора $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$, линеарно независни вектори тог простора.

8. Доказати да су функције $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto e^x$ $f_3 : x \mapsto e^{2x}$, као елементи векторског простора $(0, +\infty)^{\mathbb{R}}$, линеарно независни вектори тог простора.

База и димензија. Према Дефиницији 4.6 и Теореми 4.3, базу векторског простора чини максимални скуп линеарно независних вектора тог простора. Сваки скуп независних вектора у векторском простору може да се прошири (допуни) до базе тог простора.

9. Вектори $x_1, \ldots, x_n$ су линеарно независни вектори векторског простора V. Под којим условом је $dim V = n$?

10. Испитати да ли вектори $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 0)$ и $a_4 = (1, 1, 1, 1)$ образују базу простора $\mathbb{R}^4$.

11. Доказати да вектори $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$ и $e_4 = (1, 3, -1, 0)$ образују базу простора $\mathbb{R}^4$, а затим одредити координате вектора $x = (7, 14, -1, 2)$ у бази $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

12. Доказати да је скуп $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ једна база простора $\mathcal{P}_{\leq n}(t)$.

13. Доказати да полиноми $p_k(x) = (x-a)^k$, за $k = 0, 1, \dots, n$ и $a \in \mathbb{R}$ образују базу простора $\mathcal{P}_{\leq n}$. Одредити координате произвољног вектора $p \in \mathcal{P}_{\leq n}$ у бази $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$.

14. Одредити координате полинома $x^2 - x + 2 \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ у бази:

(1) $\{1, x-1, (x-1)^2\}$, (2) $\{1, x+1, (x+1)^2\}$.

15. Доказати да полиноми $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = -x^2 + 2x$ и $r(x) = x^2 - x$ образују базу простора $\mathcal{P}_{\leq 2}$, а затим одредити координате полинома $s(x) = -2x^2 + x - 1$ у бази $\{p, q, r\}$.

4.5 Додатак

Еуклидски простори

У векторском простору се, поред уобичајених, могу увести и друге операције. Увођењем скаларног производа могу се проучавати геометријске особине простора као што су дужина вектора, угао између два вектора, ортогоналност вектора и друге.

Дефиниција и особине Еуклидског простора

Дефиниција 4.9. *Векторски простор $\mathcal{E}$ је Еуклидски простор ако је у њему дефинисан скаларни производ којим се сваком пару вектора $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{E}$ придружује реалан број $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ са следећим својствима:*

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$, $\quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ *ако и само ако је* $\boldsymbol{x} = 0$;
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
3. $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *за* $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

Уместо $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ користе се и ознаке $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >$, па чак и само $\boldsymbol{xy}$.

Пример **4.7.** *У векторском простору $\mathbb{R}^n$ скаларни производ вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ може се дефинисати помоћу*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Пример **4.8.** *У произвољном n-димензионалном простору V скаларни производ може да се уведе на различите начине. Ако је $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ једна база тог простора и ако је*

$$\boldsymbol{x} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \cdots y_n e_n,$$

онда је са

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

дефинисан скаларни производ у V. Избором различитих база добијамо различите скаларне производе.

Пример **4.9.** *Векторски простор $C[0,1]$ свих функција непрекидних на одсечку $[0,1]$ је Еуклидски простор ако се у њему уведе скаларни производ*

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Непосредно из дефиниције скаларног производа произилазе следећа својства:

1. $(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ за $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$;
3. $(\boldsymbol{x}, 0) = 0$.

Може се доказати (на пример, [13]) да за скаларни производ важи и неједнакост

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

позната као неједнакост *Коши-Буњаковског*. У простору $\mathbb{R}^n$ та неједнакост је позната *Кошијева* неједнакост

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Дефиниција 4.10. *За вектор $\boldsymbol{x}$ Еуклидског простора број*

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

називамо нормом или дужином вектора $\boldsymbol{x}$.

За норму се користи и ознака $|\boldsymbol{x}|$. За ненулте векторе дефинише се и угао између њих.

Дефиниција 4.11. *Угао између ненултих вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ Еуклидског простора је угао $\varphi \in [0, \pi]$ дефининисан једнакошћу*

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{||\boldsymbol{x}||\, ||\boldsymbol{y}||} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}}.$$

Сагласно неједнакости Коши-Буњаковског, десна страна претходне једнакости није по модулу већа од 1, па заиста представља косинус неког угла.

Пример **4.10.** *Угао између вектора* $\boldsymbol{x} = (1,0,1,0)$ *и* $\boldsymbol{y} = (1,1,0,0)$ *простора* $\mathbb{R}^4$ *је* $\pi/3$ *јер је*

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 0}{\sqrt{1^2+0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Дефиниција 4.12. *Два вектора Еуклидског простора су ортогонална ако је њихов скаларни производ једнак нули.*

Пример **4.11.** *Функције* f *и* g *простора* $C[0,1]$ *дефинисане са* $f(x) = 2$ *и* $g(x) = 2x - 1$ *су ортогоналне јер је*

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 2(2x-1)dx = 2(x^2-x)\Big|_0^1 = 0.$$

Једначина хиперравни

У Еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ може да се дефинише појам који одговара појму *раван* у тродимензионалном простору. Нека је $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ ненулти вектор и нека је $\beta \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 4.13. *Скуп свих тачака* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *за које важи*

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\alpha} + \beta = 0$$

је $n-1$*-димензионална раван или хиперраван у простору* $\mathbb{R}^n$*.*

За $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, једначина хиперравни је

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n + \beta = 0.$$

У простору $\mathbb{R}$ (права) једначина хиперравни је

$$\alpha_1x_1 + \beta = 0,$$

што представља тачку са координатом $-\beta/\alpha_1$. У простору $\mathbb{R}^2$ (раван са координатним осама x_1 и x_2) једначина хиперравни је

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \beta = 0,$$

што представља једначину праве у равни. У простору $\mathbb{R}^3$ (простор са координатним осама x_1, x_2 и x_3) једначина хиперравни је

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \beta = 0,$$

што представља једначину равни (видети 7.1)

Ако је $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ фиксирана, а $\boldsymbol{x}$ произвољна тачка хиперравни, тада је $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a} + \beta = 0$ и $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x}) + \beta = 0$. Из својства скаларног производа следи да је $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$. То значи (према Дефиницији 4.12) да је вектор $\boldsymbol{\alpha}$ ортогоналан на вектор $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$, па за вектор $\boldsymbol{\alpha}$ можемо рећи да је *вектор нормале* хиперравни.

Поред појма *хиперраван* уводе се и појмови *k-димензионална раван, права, дуж, нормала на раван, одстојање тачке од хиперравни, пресек две равни, угао између две праве, угао између праве и хиперравни.*

Историјске напомене

1. Сматра се да се појам *векторског простора* први пут јасно појавио у раду који је немачки математичар Грасман (Hermann Günther Grassmann, 1809-1877) објавио 1862. године.

2. Еуклид (око 330 - 275. године пре нове ере) је познати грчки (антички) математичар. Поузданих података о његовом животу и раду нема, али се узима да је живео у Александрији (Египат) и да је имао математичку школу. За Еуклида се сматра да је аутор чувеног дела *Елементи* (укупно 13 књига) у којима је геометрија заснована на аксиоматским основама. Еуклиду се приписује реченица *'Не постоји краљевски пут у геометрију'* коју је упутио Птоломеју на питање да ли постоји лакши начин за учење геометрије (од проучавања *Елемената*). Алгоритам за израчунавање највећег заједничког делиоца носи његово име (Еуклидов алгоритам).