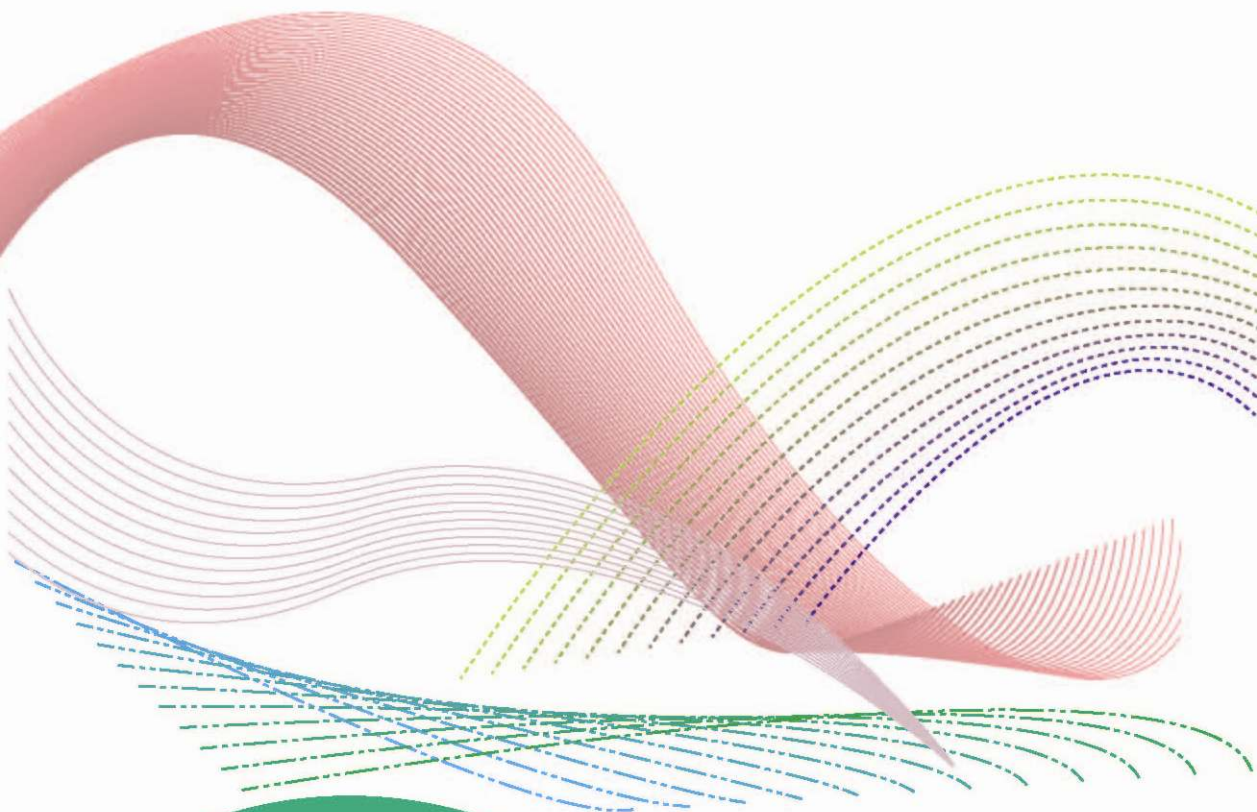


Драган Ђорић

Раде Лазовић

# МАТЕМАТИКА 1



FON

# МАТЕМАТИКА 1

## Нови уџбеник

*Рукопис је писан јасним језиком и одликује га чињеница да су све основне тврдње доказане. Да би читање текста студентима било олакшано, сложенији докази неких теорема које не представљају обавезни део курса, пребачени су у Додатке одговарајућих глава.*

Проф Вера Вујчић (из рецензије)

- Књига садржи све теме (видети Садржај) које се раде на предавањима из предмета Математика 1 и има за циљ да студентима ФОН-а олакша спремање усменог испита из тог предмета.
- У књизи се могу наћи формулације свих појмова који се траже на усменом испиту или усменом колоквијуму, као и формулације и докази свих теорема које су предвиђене за усмени. Књига садржи укупно 112 дефиниција и 114 теорема.
- Текст сваке теме у књизи је илустрован бројним примерима (укупно 170 решених примера) и сликама (укупно 58 слика) који омогућавају лакше савладавање градива. За неке примере дата су и решења добијена софтверским пакетом МАТЛАБ, при чему је конкретним кодом указано како се програм користи.
- За сваку тему је написано и посебно поглавље Питања и задаци који су у вези са изложеним градивом, што такође студентима треба да олакша савладавање основних појмова и тврђења (укупно 327 питања и задатака).
- Свака тема садржи и посебно поглавље Додатак где су издвојени докази тежих теорема и где су дате и неке додатне информације у вези са темом (11 дефиниција, 10 теорема, 10 решених примера и 9 слика).
- У сваком Додатку су дате и неке историјске напомене у вези појмова, резултата, као и занимљивих детаља из биографија најзначајнијих математичара за области које се излажу у књизи (заступљена су 23 математичара).

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
1.1	Скупови	1
1.2	Реални бројеви	3
1.3	Функције	6
1.4	Кардинални бројеви	9
1.5	Питања и задаци	12
1.6	Додатак	14
<b>2</b>	<b>Алгебарске структуре</b>	<b>16</b>
2.1	Декартов производ скупова	16
2.2	Бинарна операција	17
2.3	Алгебарске структуре са једном бинарном операцијом	18
2.4	Примери група	19
2.5	Алгебарске структуре са две бинарне операције	21
2.6	Питања и задаци	23
2.7	Додатак	26
<b>3</b>	<b>Матрице и детерминанте</b>	<b>29</b>
3.1	Матрице - појам и основне операције	29
3.2	Детерминанте	38
3.3	Инверзна матрица	46
3.4	Ранг матрице	50
3.5	Питања и задаци	53
3.6	Додатак	58
<b>4</b>	<b>Векторски простори</b>	<b>60</b>
4.1	Дефиниција векторског простора	60
4.2	Линеарна зависност и независност вектора	62
4.3	База и димензија векторског простора	64
4.4	Питања и задаци	66
4.5	Додатак	68

<b>5</b>	<b>Системи линеарних једначина</b>	<b>72</b>
5.1	Појам система линеарних једначина . . . . .	72
5.2	Крамерове формуле . . . . .	75
5.3	Кронекер-Капелијева теорема . . . . .	76
5.4	Примена Кронекер-Капелијеве теореме на решавање система линеарних једначина . . . . .	80
5.5	Гаусов алгоритам . . . . .	85
5.6	Питања и задаци . . . . .	88
5.7	Додатак . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Вектори</b>	<b>95</b>
6.1	Вектори у простору . . . . .	95
6.2	Линеарне операције са векторима . . . . .	97
6.3	Координате вектора . . . . .	99
6.4	Скаларни производ вектора . . . . .	102
6.5	Векторски производ вектора . . . . .	104
6.6	Мешовити производ вектора . . . . .	108
6.7	Питања и задаци . . . . .	110
6.8	Додатак . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Аналитичка геометрија</b>	<b>117</b>
7.1	Раван у простору . . . . .	117
7.2	Права у простору . . . . .	123
7.3	Права и раван . . . . .	128
7.4	Питања и задаци . . . . .	130
7.5	Додатак . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Низови</b>	<b>136</b>
8.1	Неки скупови у $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	136
8.2	Дефиниција низа и примери . . . . .	137
8.3	Гранична вредност низа . . . . .	139
8.4	Скуп конвергентних низова . . . . .	144
8.5	Тачке нагомилавања низа . . . . .	147
8.6	Кошијев критеријум . . . . .	150
8.7	Питања и задаци . . . . .	152
8.8	Додатак . . . . .	156
<b>9</b>	<b>Граничне вредности функција</b>	<b>158</b>
9.1	Реалне функције реалне променљиве . . . . .	158
9.2	Дефиниције граничних вредности . . . . .	159
9.3	Особине граничних вредности . . . . .	166
9.4	Упоредба бесконачно малих функција . . . . .	169

---

9.5	Примена асимптотских формула у израчунавању граничних вредности функција . . . . .	173
9.6	Питања и задаци . . . . .	174
9.7	Додатак . . . . .	179
<b>10</b>	<b>Непрекидност функција</b>	<b>180</b>
10.1	Појам непрекидности функције . . . . .	180
10.2	Врсте прекида . . . . .	184
10.3	Својства непрекидних функција . . . . .	186
10.4	Равномерна непрекидност . . . . .	189
10.5	Питања и задаци . . . . .	190
10.6	Додатак . . . . .	193
<b>11</b>	<b>Извод функције</b>	<b>195</b>
11.1	Дефиниција извода и примери . . . . .	195
11.2	Правила диференцирања . . . . .	199
11.3	Диференцијал функције . . . . .	203
11.4	Изводи и диференцијали вишег реда . . . . .	205
11.5	Питања и задаци . . . . .	208
11.6	Додатак . . . . .	210
<b>12</b>	<b>Теореме диференцијалног рачуна</b>	<b>213</b>
12.1	Локални екстремум . . . . .	213
12.2	Теореме о средњим вредностима . . . . .	214
12.3	Лопиталова правила . . . . .	218
12.4	Питања и задаци . . . . .	221
12.5	Додатак . . . . .	224
<b>13</b>	<b>Тејлорова и Маклоренова формула</b>	<b>228</b>
13.1	Тејлорова формула . . . . .	228
13.2	Маклоренова формула . . . . .	231
13.3	Примена Маклоренових развоја у израчунавању граничних вредности . . . . .	236
13.4	Питања и задаци . . . . .	238
13.5	Додатак . . . . .	242
<b>14</b>	<b>Испитивање функција</b>	<b>244</b>
14.1	Испитивање монотоности функције . . . . .	244
14.2	Довољни услови за локални екстремум . . . . .	246
14.3	Конвексност и конкавност . . . . .	249
14.4	Асимптоте . . . . .	252
14.5	Скицирање графика функције . . . . .	255
14.6	Питања и задаци . . . . .	259

14.7 Додатак . . . . .	263
<b>Литература</b>	<b>266</b>
<b>Индекс појмова</b>	<b>268</b>

# Индекс појмова

- $\varepsilon$ -околина броја, 136
- $\varepsilon$ -околина тачке
  - пробушена, 160
- Аксиома супремума, 5
- Алгебарска структура
  - група, 19
  - групоид, 18
  - поље, 23
  - полугрупа, 18
  - тело, 23
- Алгебарски комплемент, 44
- Асимптота, 253
  - хоризонтална, 253
  - коса, 253
  - вертикална, 255
- Аутоморфизам групе, 27
- База векторског простора, 64
- Бесконечно мале функције
  - еквивалентне, 170
  - истог реда, 170
  - неупоредиве, 171
- Бинарна операција, 17
  - асоцијативна, 17
  - дистрибутивна, 21
  - комутативна, 17
- Члан низа, 137
- Декартов производ скупова, 16
- Детерминанта, 39
  - Лапласов развој, 44
- Диференцијал
  - другог реда, 207
  - вишег реда, 207
- Диференцијал функције, 203
- Димензија векторског простора,
  - 65
- Домен групоида, 18
- Две праве
  - мимоилазне, 127
- Еквивалентни системи, 73
- Еквивалентни скупови, 9
- Елементарне функције, 184
  - основне, 184
- Еуклид, 71
- Еуклидски простори, 68
- Фундаментални систем решења,
  - 91
  - нормалан, 92
- Функција, 6
  - аргумент, 6
  - бесконечно мала, 166
  - бесконечно велика, 167
  - бијекција, 7
  - диференцијабилна, 198
  - домен, 6
  - идентичка, 6
  - инјекција, 7
  - инверзна, 8
  - једнакост, 7
  - кодомен, 6
  - композиција, 7
  - конкавна, 249
  - константа, 6
  - конвексна, 249
  - критичне тачке, 246
  - максимум, 159

- минимум, 159
  - монотона, 244
  - неопадајућа, 244
  - непарна, 159
  - непрекидно диференцијабилна, 206
  - нерастућа, 244
  - област дефинисаности, 158
  - ограничена, 159
  - опадајућа, 244
  - парна, 159
  - периодична, 159
  - растућа, 244
  - сирјекција, 7
  - слика, 6
  - стационарне тачке, 246
  - строго конкавна, 263
  - строго конвексна, 263
  - строго опадајућа, 244
  - строго растућа, 244
- Гаусов алгоритам, 85
- График функције, 159
- Гранична вредност функције
- бесконачна, 165
  - десна, 163
  - једностранна, 163
  - лева, 163
  - у бесконачности, 164
- Гранична вредност низа, 140
- Група, 19
- Абелова, 19
  - адитивна, 19
  - мултипликативна, 19
- Групе пермутација, 19
- Групе симетрија, 20
- Групоид, 18
- инверзни елемент, 19
  - јединични елемент, 18
  - комутативан, 18
  - неутрални елемент, 18
- Хиперраван, 70
- Хомеоморфизам група, 27
- Хомоген систем
- фундаментални систем решења, 91
- Интервал, 136
- полуотворен, 136
- Изоморфизам група, 27
- Изоморфни векторски простори, 66
- Извод
- бесконачан, 212
  - десни, 210
  - другог реда, 205
  - инверзне функције, 201
  - леви, 210
  - логаритамски, 203
  - сложене функције, 201
  - вишег реда, 205
- Извод функције, 195
- Једначина хиперравни, 70
- Једначина праве
- канонски облик, 124
  - кроз две тачке, 125
  - општи облик, 125
  - параметарски облик, 124
  - векторски облик, 124
- Једначина равни
- кроз три тачке, 118
  - нормалан облик, 120
  - општи облик, 118
  - сегментни облик, 119
  - векторски облик, 118
- Јенсенова неједнакост, 251, 264
- Канторов принцип уметнутих одсечака, 148
- Кардинални број, 9
- Кејлијева таблица, 17
- Кофактор, 44
- конкавна функција, 249
- конвексна функција, 249
- Координате вектора, 65
- Кошијев критеријум, 151



- Кошијев облик остатка, 242  
 Кошијева неједнакост, 69  
 Крамерове формуле, 76  
 Критичне тачке функције, 246  
 Кронекер-Капелијева теорема, 78  
   хомоген систем, 83  
   нехомоген систем, 80  
 Кронекеров симбол, 31, 46  
 Лагранжов облик остатка, 230  
 Лајбницова формула, 207  
 Лапласов развој детерминанте, 44  
 Линеал, 61  
 Линеарна комбинација вектора, 61  
 Линеарни омотач, 61  
 Линеарно независни вектори, 62  
 Линеарно зависни вектори, 62  
 Локални екстремум функције, 213  
   максимум, 213  
   минимум, 213  
   строги, 213  
 Локални минимум, 213  
 Лопиталово правило, 218  
 Маклоренов полином, 232  
   остатак у Пеановом облику, 237  
 Маклоренова формула, 231  
 Матрица, 30  
   адјунгована, 47  
   базисне колоне, 51, 76  
   базисне врсте, 51, 76  
   базисни минор, 51, 76  
   дијагонала, 31  
   дијагонална, 31  
   доња троугаона, 31  
   елементарне трансформације, 51  
   горња троугаона, 31  
   идемпотентна, 37  
   инверзна, 47  
   инволутивна, 37  
   јединична, 31  
   кофактор, 47  
   минор, 50  
   множење, 34  
   множење скаларом, 33  
   нилпотентна, 37  
   нула, 30  
   одузимање, 33  
   ортогонална, 37  
   простор колоне, 78  
   простор врста, 78  
   ранг, 51  
   регуларна, 48  
   сабирање, 32  
   симетрична, 37  
   сингуларна, 48  
   скаларна, 31  
   степен, 35  
   типа  $m \times n$ , 30  
   траг, 31  
   транспонована, 37  
 Матрична једначина, 49  
 Минор матрице, 44  
 Множење матрица, 34  
 Неједнакост  
   Бернулијева, 156  
   Јенсенова, 251, 264  
   Коши-Буњаковског, 69  
 Неодређеност  
   облика  $0 \cdot \infty$ , 220  
   облика  $\frac{0}{0}$ , 218  
   облика  $0^0$ , 220  
   облика  $1^\infty$ , 220  
   облика  $\infty - \infty$ , 220  
   облика  $\frac{\infty}{\infty}$ , 220  
   облика  $\infty^0$ , 220  
 Непрекидност функције, 180  
   на скупу, 181  
   равномерна, 189  
   у тачки, 180  
 Низ реалних бројева, 137

- дивергентан, 140
- Фибоначијев, 139
- фундаменталан, 150
- хармонијски, 139
- конвергентан, 140
- Кошијев, 150
- монотон, 138
- ограничен, 138
- опадајући, 138
- растући, 138
- строго опадајући, 138
- строго растући, 138
- Норма вектора, 69
- Нормала криве, 198
- Нула низ, 144
- Одсечак, 136
- Одстојање тачке од равни, 121
- Одзимање матрица, 33
- Околина броја, 136
- Околина тачке
  - десна, 162
  - лева, 162
  - пробушена, 160
- Остатак у Тејлоровој формули
  - Кошијев облик, 242
  - Лагранжов облик, 230
  - Пеанов облик, 230
- Пеанов облик остатка, 230
- Период функције, 159
  - основни, 159
- Пермутација
  - инверзна, 39
  - непарна, 38
  - парна, 38
- Пермутације
  - инверзија, 38
  - скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ , 38
- Подматрица, 32
- Подскуп, 1
- Полугрупа, 18
- Права
  - вектор правца, 123
- Прекид функције, 185
  - друге врсте, 186
  - прве врсте, 185
- Превојна тачка функције, 251
- Прираштај
  - аргумента, 195
  - функције, 195
  - независне променљиве, 195
- Прираштај функције, 181
- Проширени скуп реалних бројева, 136
- Прстен, 21
- Сабирање матрица, 32
- Сегмент, 136
- Семигрупа, 18
- Систем линеарних једначина, 72
  - хомоген, 72
  - коефицијенти, 72
  - Крамерове формуле, 76
  - квадратни, 72
  - матрица система, 74
  - матрични облик, 74
  - нехомоген, 72
  - немогућ, 73
  - непознате, 72
  - правоугаони, 72
  - решење, 73
  - сагласан, 73
  - слободни чланови, 72
  - векторски запис, 75
- Скаларни производ у векторском простору, 68
- Скок функције у тачки, 185
- Скуп, 1
  - бесконачан, 10
  - једнакост, 2
  - комплемент, 3
  - моћ, 9
  - непребројив, 10
  - партитивни, 3
  - пребројив, 10
  - пресек, 2

- разлика, 2
- унија, 2
- Скуп реалних бројева, 4
  - инфимум, 5
  - максимум, 5
  - минимум, 5
  - ограничен, 4
  - ограничен одоздо, 4
  - ограничен одозго, 4
  - супремум, 4
- Стационарне тачке функције, 246
- Степен матрице, 35
- Субматрица, 32
- Таблица извода, 202
- Тачка прекида функције, 185
- Тачка превоја, 251
- Тангента криве, 197
- Тејлоров полином, 229
- Тејлорова формула, 229
  - локална, 231
- Теорема
  - Болцано - Вајерштрасова, 149
  - Дарбуова, 225
  - друга Коши-Болцанова, 189
  - друга Вајерштрасова, 187
  - Фермаова, 213
  - Кантор-Бернштајнова, 10
  - Канторов принцип уметнутих одсечака, 148
  - Канторова, 190
  - Кошијев критеријум, 151
  - Кошијева, 216
  - Крамерова, 76
  - Кронекер-Капелијева, 78
  - Лагранжова, 215
  - Лапласов развој детерминанте, 44
  - о базисном минору, 77
  - о три низа, 143
  - прва Коши-Болцанова, 188
  - прва Вајерштрасова, 186
  - Ролова, 214
  - Штолцова, 226
  - Вајерштрасова, 242
- Угао
  - између две равни, 122
  - између двеју правих, 127
  - између праве и равни, 129
- Угао између два вектора, 96
- Уређен пар, 16
- Уређена тројка, 16
- Узајамни положај
  - две праве, 126
  - две равни, 121
  - праве и равни, 128
- Вектор нормале хиперравни, 71
- Векторски простор
  - комплексан, 60
  - реалан, 60

## Глава 4

# Векторски простори

Појам векторског или линеарног простора је један од важних појмова у математици. Он омогућава да се разни скупови, независно од природе њихових елемената, могу проучавати са заједничког становишта у односу на уведене линеарне операције.

### 4.1 Дефиниција векторског простора

Нека је  $V$  непразан скуп, нека је  $K$  поље и нека су  $+$  :  $V^2 \rightarrow V$  и  $\cdot$  :  $K \times V \rightarrow V$  бинарне операције.

**Дефиниција 4.1.** Алгебарска структура  $(V, K, +, \cdot)$  је векторски или линеарни простор ако је:

1.  $(V, +)$  Абелова група,
2.  $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ ,
3.  $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ ,
4.  $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ ,
5.  $1 \cdot x = x$

за све  $x, y \in V$  и све  $\alpha, \beta \in K$ . Елементи скупа  $V$  су вектори, а елементи скупа  $K$  скалари. Ако је  $K = \mathbb{R}$ , векторски простор је реалан, а ако је  $K = \mathbb{C}$ , векторски простор је комплексан.

Операцију  $+$  често називамо *сабирање вектора*, а операцију  $\cdot$   *множење вектора скаларом*. Неутрални елемент у операцији сабирања (у ознаци  $0$ ) је нулти вектор, док је  $-x$  супротан елемент вектора  $x$ . Често се векторски простор означава само са  $V$ , а операција  $\alpha \cdot x$  са  $\alpha x$ .

**ПРИМЕР 4.1.** Лако се проверава да елементи скупа  $V$  и поља  $K$  са операцијама  $+$  и  $\cdot$  испуњавају услове 1.-5. из Дефиниције 4.1 ако је:

1.  $V = \mathbb{C}$ ,  $K = \mathbb{R}$ ,  $a + u \cdot$  су стандардне операције у  $\mathbb{C}$ ;
2.  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $K = \mathbb{R}$ ,  $a + u \cdot$  су дефинисани са

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

За векторски простор  $\mathbb{R}^n$  користи се и назив линеарни аритметички простор;

3.  $V = \mathcal{P}_{\leq n}$  (скуп свих полинома степена не већег од  $n$ ),  $K = \mathbb{R}$ ,  $a + u \cdot$  су сабирање полинома и множење полинома реалним бројем;
4.  $V = M_{m \times n}$  (скуп свих реалних матрица типа  $m \times n$ ),  $K = \mathbb{R}$ ,  $a + u \cdot$  су операције сабирања матрица и множења матрице реалним бројем;
5.  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (скуп свих функција  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ),  $K = \mathbb{R}$ ,  $a + u \cdot$  су дате са

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Дакле, у свим наведеним случајевима структура  $(V, K, +, \cdot)$  је векторски простор.

Помоћу датих вектора из  $V$  може да се генерише нови вектор.

**Дефиниција 4.2.** Линеарна комбинација вектора  $x_1, \dots, x_n$  из  $V$  је вектор

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где су  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  скалари из  $K$ .

На пример, у простору  $\mathbb{R}^3$  линеарна комбинација  $2x + 3y$  вектора  $x = (3, -1, 2)$  и  $y = (-1, 0, 1)$  је вектор  $z = (3, -2, 7)$ .

**Дефиниција 4.3.** Скуп свих линеарних комбинација вектора  $x_1, \dots, x_n$  датог скупа  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  је линеарни омотач или линеал над  $X$  и означава се са  $L(X)$ .

Дакле,

$$L(X) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}.$$

За скуп  $X$  кажемо да је генераторски скуп за  $L(X)$  или да генерише  $L(X)$ .

## 4.2 Линеарна зависност и независност вектора

**Дефиниција 4.4.** Вектори  $x_1, \dots, x_n$  векторског простора  $V$  су линеарно зависни ако постоје скалари  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  из  $K$ , од којих је бар један различит од нуле и за које важи

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (4.1)$$

У противном, вектори  $x_1, \dots, x_n$  су линеарно независни.

Другим речима, вектори  $x_1, \dots, x_n$  су линеарно независни ако је једнакост (4.1) могућа само за  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . За скуп вектора се каже да је линеарно зависан или независан према томе да ли су вектори тог скупа линеарно зависни или независни. Очигледно је да је скуп вектора који садржи нула вектор линеарно зависан. Такође, ако су  $x_1, \dots, x_n$  линеарно зависни вектори датог векторског простора, онда су и  $x_1, \dots, x_n, x$  линеарно зависни за произвољан вектор  $x$  тог простора.

**ПРИМЕР 4.2.** Вектори  $x = (2, -1, 3, 4)$ ,  $y = (1, 0, 1, -1)$ ,  $z = (1, -1, 2, 5)$  векторског простора  $\mathbb{R}^4$  су линеарно зависни јер је  $1 \cdot x - 1 \cdot y - 1 \cdot z = 0$ .

**ПРИМЕР 4.3.** Полиноми  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  и  $p_3(x) = x^2$ , као елементи векторског простора  $\mathcal{P}_{\leq 2}$ , су линеарно независни. Наиме, из једнакости  $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0$  следи  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

**ПРИМЕР 4.4.** Функције  $f_1 : x \mapsto \cos x$ ,  $f_2 : x \mapsto \cos 2x$ ,  $f_3 : x \mapsto \cos 3x$ , као елементи векторског простора  $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$ , су линеарно независни вектори тог простора. То можемо показати тако што докажемо да из једнакости  $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$  (која важи за свако  $x \in \mathbb{R}$ ) следи  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Диференцирањем израза  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$  два пута, а затим још два пута, добијемо једнакости

$$\alpha_1 \cos x + 4\alpha_2 \cos 2x + 9\alpha_3 \cos 3x = 0, \quad \alpha_1 \cos x + 16\alpha_2 \cos 2x + 81\alpha_3 \cos 3x = 0.$$

Специјално, за  $x = 0$  имамо једнакости

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1 + 4\beta_1 + 9\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 + 16\alpha_2 + 81\alpha_3 = 0$$

из којих следи  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

**Теорема 4.1.** Вектори  $x_1, \dots, x_n$  су линеарно зависни ако и само ако је један од њих линеарна комбинација осталих вектора.

Доказ. Ако су вектори линеарно зависни, тада у њиховој линеарној комбинацији је бар један скалар различит од нуле. Вектор уз тај скалар је линеарна комбинација осталих.

Обратно, ако је један од њих линеарна комбинација осталих, онда је линеарна комбинација свих вектора једнака нули, а један скалар је једнак 1 (различит од нуле). ■

На пример, полином  $q(x) = 2x + 3$  и полиноми  $p_1$  и  $p_2$  (Пример 4.3) векторског простора  $\mathcal{P}_{\leq 2}$  су линеарно зависни јер је  $q = 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_1$ .

**Дефиниција 4.5.** *Бесконечно много вектора су линеарно независни ако је сваки њихов коначан подскуп линеарно независан. У противном, вектори су линеарно зависни.*

**Теорема 4.2.** *Ако је сваки од вектора  $y_1, y_2, \dots, y_m$  линеарна комбинација вектора  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и ако је  $m > n$ , тада су вектори  $y_1, y_2, \dots, y_m$  линеарно зависни.*

Доказ. Теорема се може доказати индукцијом по  $n$ . За  $n = 1$  тврђење је очигледно тачно. Ако претпоставимо да је тврђење теореме тачно за неких  $n - 1$  вектора, онда треба доказати да оно важи и за свих  $n$  вектора. Нека је

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned}$$

Могућа су два случаја.

1. Сви коефицијенти  $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$  су једнаки нули. Тада су вектори  $y_1, y_2, \dots, y_m$  линеарне комбинације  $n - 1$  вектора  $x_2, \dots, x_n$ . Према индукцијској хипотези они су линеарно зависни.
2. Бар један од коефицијената  $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$  је различит од нуле. Не смањујући општост, можемо претпоставити да је  $a_{11} \neq 0$ . Тада је сваки од  $m - 1$  вектора

$$y'_2 = y_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1, \dots, y'_m = y_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}y_1$$

линеарна комбинација  $n - 1$  вектора  $x_2, \dots, x_n$  (проверите!). Обзиром да је  $m - 1 > n - 1$ , према индукцијској претпоставци они су линеарно зависни. Дакле, постоје скалари  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ , који нису сви једнаки нули и за које је

$$\lambda_2 y'_2 + \cdots + \lambda_m y'_m = 0,$$

односно

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_m y_m = 0,$$

где је

$$\lambda_1 = - \left( \frac{a_{21}}{a_{11}} \lambda_2 + \cdots + \frac{a_{m1}}{a_{11}} \lambda_m \right).$$

Пошто је бар један од скалара  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  различит од нуле, вектори  $y_1, y_2, \dots, y_m$  су линеарно зависни. ■

### 4.3 База и димензија векторског простора

У векторском простору су посебно важни скупови вектора чије линеарне комбинације генеришу цео простор.

**Дефиниција 4.6.** База  $\mathcal{B}$  векторског простора  $V$  је уређен скуп линеарно независних вектора из  $V$  за које је  $L(\mathcal{B}) = V$ .

Из ове дефиниције произилази да се сваки вектор из  $V$  може изразити као линеарна комбинација вектора базе.

**ПРИМЕР 4.5.**

Једна база простора  $\mathbb{R}^n$  је  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , где је

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Заиста, вектори скупа  $\mathcal{B}$  су линеарно независни и сваки вектор  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  из  $\mathbb{R}^n$  је линеарна комбинација вектора из  $\mathcal{B}$  јер је

$$\begin{aligned} a &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n. \end{aligned}$$

**ПРИМЕР 4.6.** Полиноми  $p_1(x) = 1$ ,  $p_2(x) = x$  и  $p_3(x) = x^2$  чине базу векторског простора  $\mathcal{P}_{\leq 2}$  јер су линеарно независни и при томе је

$$p = a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3$$

за произвољан полином  $p(x) = a + bx + cx^2$  из  $\mathcal{P}_{\leq 2}$ .

Ако у векторском простору  $V$  постоји база која садржи коначан број вектора, простор је коначнодимензионалан. У противном, простор је бесконачнодимензионалан. Ако база векторског простора садржи  $n$  елемената, кажемо да је простор  $n$ -димензионалан.

**Теорема 4.3.** У  $n$ -димензионалном векторском простору не постоји више од  $n$  линеарно независних вектора.



Доказ. Нека су  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  произвољни вектори  $n$ -димензионалног векторског простора  $V$ . Пошто је сваки од њих линеарна комбинација  $n$  вектора базе, према Теорему 4.2 они су линеарно зависни. ■

**Теорема 4.4.** Сваки скуп од  $n$  линеарно независних вектора образује базу  $n$ -димензионалног векторског простора  $V$ .

Доказ. Нека су  $b_1, \dots, b_n$  линеарно независни вектори  $n$ -димензионалног векторског простора  $V$  и нека је  $x$  произвољан вектор из  $V$ . Тада је, према Теорему 4.2, скуп вектора  $x, b_1, \dots, b_n$  линеарно зависан јер је сваки од њих линеарна комбинација вектора базе. Према томе, важи

$$\lambda x + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$$

за неке скаларе  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  од којих је бар један различит од нуле. Међутим, мора бити  $\lambda \neq 0$  јер би у противном сви скалари  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  били једнаки нули (због линеарне независности вектора  $b_1, \dots, b_n$ ). Тада је

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} b_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} b_n. \quad \blacksquare$$

Из претходне две теореме следи да база коначнодимензионалног векторског простора није јединствена, али је број елемената базе јединствен. На основу те чињенице дефинише се још једна карактеристика векторског простора.

**Дефиниција 4.7.** Број елемената базе коначнодимензионалног векторског простора  $V \neq \{0\}$  је димензија тог простора и означава се са  $\dim V$ . За  $V = \{0\}$  је  $\dim V = 0$ .

У Примеру 4.5 база векторског простора  $\mathbb{R}^n$  има  $n$  елемената. Према томе,  $\dim \mathbb{R}^n = n$ . У Примеру 4.6 база векторског простора  $\mathcal{P}_{\leq 2}$  има три елемента. То значи да је  $\dim \mathcal{P}_{\leq 2} = 3$ .

Нека је  $V$  векторски простор димензије  $n$  и нека је  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  једна база тог простора.

**Дефиниција 4.8.** Ако је  $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  за  $x \in V$ , скалари  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  су координате вектора  $x$  у бази  $\mathcal{B}$ .

**Теорема 4.5.** Координате сваког вектора коначнодимензионалног векторског простора у датој бази су јединствене.

Доказ. Нека је  $V$  произвољан  $n$ -димензионални векторски простор са базом  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Претпоставимо да је

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$$

за неко  $x \in V$ . Тада је

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0,$$

па, због независности вектора базе, следи

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0,$$

односно  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$ . ■

Ако су  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  координате вектора  $x \in V$ , а  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  координате вектора  $y \in V$  у истој бази, тада су  $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$  координате вектора  $\lambda x$  за  $\lambda \in R$ , а  $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$  координате вектора  $x + y$  у тој бази.

Увођењем координата вектора у односу на изабрану базу, сваком вектору  $x \in V$  придружује се јединствена уређена  $n$ -торка простора  $\mathbb{R}^n$ . Ово придруживање је обострано једнозначно (бијекција), а операције над векторима из  $V$  преносе се на одговарајуће операције над елементима простора  $\mathbb{R}^n$ . За просторе  $V$  и  $\mathbb{R}^n$  кажемо да су *изоморфни*. Сваки  $n$ -димензионални векторски простор је изоморфан векторском простору  $\mathbb{R}^n$ .

#### 4.4 Питања и задаци

**Појмови.** У овој глави су дефинисани појмови: *векторски простор, вектор, скалар, реалан векторски простор, комплексан векторски простор, линеарна комбинација вектора, линеарни омотач (линеал), генераторски скуп, линеарно зависни вектори, линеарно независни вектори, база векторског простора, коначнодимензионални векторски простор, бесконачнодимензионални векторски простор, димензија векторског простора, координате вектора*. Ове појмове треба знати, као и неке примере у којима се они појављују.

1. Да ли је скуп реалних бројева векторски простор ако је сабирање вектора дефинисано као уобичајено сабирање бројева, а множење скалара  $\lambda \in \mathbb{R}$  и вектора  $x \in \mathbb{R}$  дефинисано са  $\lambda \cdot x = |\lambda|x$ ?
2. Да ли је скуп полинома датог степена  $n$  векторски простор у односу на уобичајено сабирање полинома и множење полинома реалним бројем?
3. Да ли је скуп функција облика  $a \cos t + b \sin t$  за  $t, a, b \in \mathbb{R}$  векторски простор у односу на уобичајено сабирање функција и множење функције реалним бројем?

**Линеарна зависност и независност.** За линеарну комбинацију  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$  вектора  $x_1, \dots, x_n$  неког векторског простора кажемо да је *нетривијална* ако је бар један од коефицијената  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  различит од нуле. Према Дефиницији 4.4 вектори  $x_1, \dots, x_n$  су *линеарно зависни* ако постоји нетривијална линеарна комбинација тих вектора која је једнака нула-вектору. У супротном, вектори  $x_1, \dots, x_n$  су *линеарно независни*.

4. Нека је  $S = \{x_1, \dots, x_k\}$  скуп вектора векторског простора  $V$ . Доказати следећа тврђења.

- 1) Ако  $0 \in S$ , вектори скупа  $S$  су линеарно зависни.
- 2) Ако скуп  $S$  садржи линеарно зависан подскуп, вектори скупа  $S$  су линеарно зависни.
- 3) Ако су вектори скупа  $S$  линеарно независни, тада су вектори сваког његовог подскупа такође линеарно независни.

5. Испитати линеарну зависност вектора  $a = (1, 3, 4)$ ,  $b = (3, 3, 2)$  и  $c = (8, 1, 3)$  у простору  $\mathbb{R}^3$ .

6. Доказати да су  $x_1 = (1, 2, 0, 4)$ ,  $x_2 = (-1, 0, 5, 1)$ ,  $x_3 = (1, 6, 10, 14)$  линеарно зависни вектори простора  $\mathbb{R}^4$ , а затим навести бар једну нетривијалну линеарну комбинацију вектора  $x_1, x_2, x_3$  која је једнака нула-вектору.

7. Доказати да су функције  $f_1 : x \mapsto \sin x$ ,  $f_2 : x \mapsto \sin 2x$ ,  $f_3 : x \mapsto \sin 3x$ , као елементи векторског простора  $[-1, 1]^{\mathbb{R}}$ , линеарно независни вектори тог простора.

8. Доказати да су функције  $f_1 : x \mapsto 1$ ,  $f_2 : x \mapsto e^x$ ,  $f_3 : x \mapsto e^{2x}$ , као елементи векторског простора  $(0, +\infty)^{\mathbb{R}}$ , линеарно независни вектори тог простора.

**База и димензија.** Према Дефиницији 4.6 и Теореме 4.3, базу векторског простора чини максимални скуп линеарно независних вектора тог простора. Сваки скуп независних вектора у векторском простору може да се прошири (допуни) до базе тог простора.

9. Вектори  $x_1, \dots, x_n$  су линеарно независни вектори векторског простора  $V$ . Под којим условом је  $\dim V = n$ ?

10. Испитати да ли вектори  $a_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $a_2 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $a_3 = (1, 1, 1, 0)$  и  $a_4 = (1, 1, 1, 1)$  образују базу простора  $\mathbb{R}^4$ .

11. Доказати да вектори  $e_1 = (1, 2, -1, -2)$ ,  $e_2 = (2, 3, 0, -1)$ ,  $e_3 = (1, 2, 1, 4)$  и  $e_4 = (1, 3, -1, 0)$  образују базу простора  $\mathbb{R}^4$ , а затим одредити координате вектора  $x = (7, 14, -1, 2)$  у бази  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ .

12. Доказати да је скуп  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$  једна база простора  $\mathcal{P}_{\leq n}(t)$ .

13. Доказати да полиноми  $p_k(x) = (x - a)^k$ , за  $k = 0, 1, \dots, n$  и  $a \in \mathbb{R}$  образују базу простора  $\mathcal{P}_{\leq n}$ . Одредити координате произвољног вектора  $p \in \mathcal{P}_{\leq n}$  у бази  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ .

14. Одредити координате полинома  $x^2 - x + 2 \in \mathcal{P}_{\leq 2}$  у бази:

$$(1) \{1, x - 1, (x - 1)^2\}, \quad (2) \{1, x + 1, (x + 1)^2\}.$$

15. Доказати да полиноми  $p(x) = x^2 + 1$ ,  $q(x) = -x^2 + 2x$  и  $r(x) = x^2 - x$  образују базу простора  $\mathcal{P}_{\leq 2}$ , а затим одредити координате полинома  $s(x) = -2x^2 + x - 1$  у бази  $\{p, q, r\}$ .

## 4.5 Додатак

### Еуклидски простори

У векторском простору се, поред уобичајених, могу увести и друге операције. Увођењем скаларног производа могу се проучавати геометријске особине простора као што су дужина вектора, угао између два вектора, ортогоналност вектора и друге.

### Дефиниција и особине Еуклидског простора

**Дефиниција 4.9.** Векторски простор  $\mathcal{E}$  је Еуклидски простор ако је у њему дефинисан скаларни производ којим се сваком пару вектора  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$  придружује реалан број  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  са следећим својствима:

1.  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$  ако и само ако је  $\mathbf{x} = 0$ ;
2.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ;
3.  $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  за  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
4.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

Уместо  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  користе се и ознаке  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , па чак и само  $\mathbf{x}\mathbf{y}$ .

**ПРИМЕР 4.7.** У векторском простору  $\mathbb{R}^n$  скаларни производ вектора  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  може се дефинисати помоћу

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

**ПРИМЕР 4.8.** У произвољном  $n$ -димензионалном простору  $V$  скаларни производ може да се уведе на различите начине. Ако је  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  једна база тог простора и ако је

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \quad \mathbf{y} = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n,$$

онда је са

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

дефинисан скаларни производ у  $V$ . Избором различитих база добијамо различите скаларне производе.

**ПРИМЕР 4.9.** Векторски простор  $C[0, 1]$  свих функција непрекидних на одсечку  $[0, 1]$  је Еуклидски простор ако се у њему уведе скаларни производ

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Непосредно из дефиниције скаларног производа произилазе следећа својства:

1.  $(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  за  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
2.  $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ;
3.  $(\mathbf{x}, 0) = 0$ .

Може се доказати (на пример, [13]) да за скаларни производ важи и неједнакост

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

позната као неједнакост Коши-Буњаковског. У простору  $\mathbb{R}^n$  та неједнакост је позната Кошијева неједнакост

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

**Дефиниција 4.10.** За вектор  $\mathbf{x}$  Еуклидског простора број

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

називамо нормом или дужином вектора  $\mathbf{x}$ .

За норму се користи и ознака  $|\mathbf{x}|$ . За ненулте векторе дефинише се и угао између њих.

**Дефиниција 4.11.** Угао између ненултих вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  Еуклидског простора је угао  $\varphi \in [0, \pi]$  дефинисан једнакошћу

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \sqrt{(\mathbf{y}, \mathbf{y})}}.$$

Сагласно неједнакости Коши-Буњаковског, десна страна претходне једнакости није по модулу већа од 1, па заиста представља косинус неког угла.

**ПРИМЕР 4.10.** Угао између вектора  $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0)$  и  $\mathbf{y} = (1, 1, 0, 0)$  простора  $\mathbb{R}^4$  је  $\pi/3$  јер је

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

**Дефиниција 4.12.** Два вектора Еуклидског простора су ортогонална ако је њихов скаларни производ једнак нули.

**ПРИМЕР 4.11.** Функције  $f$  и  $g$  простора  $C[0, 1]$  дефинисане са  $f(x) = 2$  и  $g(x) = 2x - 1$  су ортогоналне јер је

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 2(2x - 1)dx = 2(x^2 - x) \Big|_0^1 = 0.$$

### Једначина хиперравни

У Еуклидском простору  $\mathbb{R}^n$  може да се дефинише појам који одговара појму *раван* у тродимензионалном простору. Нека је  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  ненулти вектор и нека је  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Дефиниција 4.13.** Скуп свих тачака  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  за које важи

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta = 0$$

је  $n - 1$ -димензионална *раван* или *хиперраван* у простору  $\mathbb{R}^n$ .

За  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \beta = 0.$$

У простору  $\mathbb{R}$  (права) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \beta = 0,$$

што представља тачку са координатом  $-\beta/\alpha_1$ . У простору  $\mathbb{R}^2$  (раван са координатним осама  $x_1$  и  $x_2$ ) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta = 0,$$

што представља једначину праве у равни. У простору  $\mathbb{R}^3$  (простор са координатним осама  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ ) једначина хиперравни је

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta = 0,$$

што представља једначину равни (видети 7.1)

Ако је  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  фиксирана, а  $\mathbf{x}$  произвољна тачка хиперравни, тада је  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a} + \beta = 0$  и  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) + \beta = 0$ . Из својства скаларног производа следи да је  $(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ . То значи (према Дефиницији 4.12) да је вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  ортогоналан на вектор  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ , па за вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  можемо рећи да је *вектор нормале* хиперравни.

Поред појма *хиперраван* уводе се и појмови *k-димензионална раван*, *права*, *дуж*, *нормала на раван*, *одстојање тачке од хиперравни*, *пресек две равни*, *угао између две праве*, *угао између праве и хиперравни*.

### Историјске напомене

1. Сматра се да се појам *векторског простора* први пут јасно појавио у раду који је немачки математичар Грасман (Hermann Günther Grassmann, 1809-1877) објавио 1862. године.



2. Еуклид (око 330 - 275. године пре нове ере) је познати грчки (антички) математичар. Поузданих података о његовом животу и раду нема, али се узима да је живео у Александрији (Египат) и да је имао математичку школу. За Еуклида се сматра да је аутор чувеног дела *Елементи* (укупно 13 књига) у којима је геометрија заснована на аксиоматским основама. Еуклиду се приписује реченица *'Не постоји краљевски пут у геометрију'* коју је упутио Птолемеју на питање да ли постоји лакши начин за учење геометрије (од проучавања *Елемената*). Алгоритам за израчунавање највећег заједничког делioca носи његово име (Еуклидов алгоритам).