

Д. Ђорић

Р. Лазовић

Ђ. Јованов

МАТЕМАТИКА 2
Збирка задатака и примери колоквијума

РЕШЕЊА ОДАБРАНИХ ЗАДАТАКА

Драган Ђорић

Први део (68 задатака), 20.3.2011.

Садржај

ЗАДАЦИ	3
1 Граничне вредности	3
2 Непрекидност	3
3 Парцијални изводи	3
4 Диференцијабилност	4
5 Изводи имплицитне функције	4
6 Извод у смеру датог вектора	5
7 Тангентна раван и нормала површи	5
8 Парцијални изводи вишег реда	5
9 Тејлоров полином	5
10 Локални екстремуми	6
11 Условни екстремуми	6
12 Апсолутни екстремуми на области	7
РЕШЕЊА	8

З А Д А Ц И

1 Граничне вредности

1.1. [Зад.3, стр.13]

1.2. [Зад.6, стр.13]

1.3. [Зад.40, стр.16]

1.4. [Зад.41, стр.16]

1.5. [Зад.54, стр.17]

1.6. [Зад.62, стр.18]

1.7. [Зад.52, стр.17]

2 Непрекидност

2.1. [Зад.2, стр.19]

2.2. [Зад.4, стр.19]

2.3. [Зад.6, стр.19]

2.4. [Зад.28, стр.21]

2.5. [Зад.34, стр.21]

2.6. [Зад.37, стр.21]

3 Парцијални изводи

3.1. [Зад.24, стр.25]

3.2. [Зад.25, стр.25]

3.3. [Није из Збирке]

Одредити f'_x и f_y за функцију $f : (x, y) \mapsto xy^2e^{x^2+y^4}$

3.4. [Зад.11, стр.24]

3.5. [Зад.18, стр.24]

3.6. [Зад.34, стр.26]

3.7. [Зад.30, стр.25]

4 Диференцијабилност

4.1. [Зад.43, стр.27]

4.2. [Зад.46, стр.27]

4.3. [Зад.49, стр.28]

4.4. [Зад.55, стр.28]

4.5. [Зад.63, стр.28]

5 Изводи имплицитне функције

5.1. [Зад.66, стр.29]

5.2. [Зад.70, стр.29]

5.3. [Зад.76, стр.29]

5.4. [Зад.2, стр.68 (Пр.10 - за СР)]

5.5. [Зад.80, стр.30]

6 Извод у смеру датог вектора

6.1. [Зад.86, стр.31]

6.2. [Зад.88, стр.32]

6.3. [Зад.81, стр.31]

7 Тангентна равна и нормала површи

7.1. [Зад.96, стр.32]

8 Парцијални изводи вишег реда

8.1. [Зад.2, стр.34]

8.2. [Зад.6, стр.34]

8.3. [Није из Збирке]

Испитати да ли постоји $f''_{xy}(0,0)$ за функцију

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

8.4. [Зад.21, стр.35]

9 Тејлоров полином

9.1. [Зад.27, стр.36]

9.2. [Зад.30, стр.36]

9.3. [Зад.31, стр.36]

9.4. [Зад.32, стр.36]

10 Локални екстремуми

10.1. [Зад.28, стр.39]

10.2. [Зад.30, стр.39]

10.3. [Није из Збирке]

Да ли функција $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ има локалних екстремума?

10.4. [Није из Збирке]

Да ли функција $f : (x, y) \mapsto |x| + y^2$ има локалних екстремума?

10.5. [Зад.4, стр.38]

10.6. [Зад.15, стр.38]

10.7. [Зад.35, стр.39]

10.8. [Зад.39, стр.40]

10.9. [Није из Збирке]

Одредити све ЛЕ функције

$$f : (x, y, z) \mapsto xyz + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

10.10. [Није из Збирке]

Одредити све ЛЕ функције

$$f : (x, y, z) \mapsto xyz(4 - x - y - z)$$

11 Условни екстремуми

11.1. [Зад.49, стр.40]

11.2. [Није из Збирке (Колоквијум, 2007)]

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, \quad \varphi(x, y) = 3x^2 + y^2 - 12$$

11.3. [Зад.61, стр.41]

11.4. [Није из Збирке]

$$f(x, y, z) = x + z, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

11.5. [Зад.59, стр.41]

11.6. [Зад.63, стр.41]

11.7. [Зад.62, стр.41]

11.8. [Зад.65, стр.41]

11.9. [Није из Збирке]

$$f(x, y, z) = x + 2y + z, 2x^2 + y^2 - z^2 = 2, y^2 + z^2 = 2$$

11.10. [Није из Збирке]

Испитати да ли функција $f(x, y, z) \mapsto xy + yz$ има у тачки $A(1, 1, 1)$ локални условни екстремум при условима $x^2 + y^2 = 2$ и $y + z = 2$.

12 Апсолутни екстремуми на области

12.1. [Зад.81, стр.42]

12.2. [Није из Збирке]

$$f : (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2), D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

12.3. [Није из Збирке]

$$f(x, y) = xy - x^2y - \frac{1}{2}xy^2, D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

12.4. [Није из Збирке]

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2, D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

12.5. [Зад.84, стр.42]

12.6. [Није из Збирке]

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y), D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\}$$

РЕШЕЊА

1.1. Прво решење.

$$|f(x, y) - 0| = |(x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \leq 2\delta = \varepsilon$$

Друго решење.

Ако $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ када $n \rightarrow \infty$, онда

$$|f(x_n, y_n)| = \left| (x_n + y_n) \sin \frac{1}{x_n} \sin \frac{1}{y_n} \right| \leq |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| \rightarrow 0$$

$$|f(x_n, y_n)| \rightarrow 0 \implies f(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ када } n \rightarrow \infty$$

1.2. За $\varepsilon > 0$ узмимо $C(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}$.

Ако је $d((x, y), (0, 0)) > C$, тада је

$$|f(x, y) - 2| = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|}{x^2 + y^2} + \frac{|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{2}{d((x, y), (0, 0))} < \frac{2}{C} = \varepsilon.$$

1.3.

$$f(x, y) = \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho \sin \varphi}{\rho^2} = \rho \cdot h(\varphi)$$

Како је $|h(\varphi)| = |\cos^2 \varphi \sin \varphi| \leq 1$, то $g(\rho, \varphi) \rightarrow 0$ када $\rho \rightarrow 0$. Дакле, $f(x, y) \rightarrow 0$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Друго решење.

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |y| \leq |y| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0$$

1.4.

$$f(x, y) = \frac{\rho(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\rho^2(\cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi} = g\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot h(\varphi)$$

Како је $|h(\varphi)| \leq \frac{2}{1 - 1/2} = 4$, имамо

$$|f(x, y)| \leq \frac{4}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow +\infty$$

Према томе, $f(x, y) \rightarrow 0$ када $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$.

1.5. Нека је $f(x, y) = e^{u(x, y)}$, где је

$$u(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) = \rho^4 \ln \rho^2 \cdot \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = g(\rho) \cdot h(\varphi)$$

Како $g(\rho) = 2\rho^4 \ln \rho \rightarrow 0$ када $\rho \rightarrow 0$ и $|h(\varphi)| \leq 1$, то $u(x, y) \rightarrow 0$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, односно $f(x, y) \rightarrow 1$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

1.6.

$$f(x, y) = \left((1 + xy^2)^{1/xy^2} \right)^{xy^2} = u(x, y)^{v(x, y)}$$

Како

$$u(x, y) = (1 + xy^2)^{1/xy^2} \rightarrow e, \quad (x, y) \rightarrow (0, 3)$$

$$v(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + xy} = \frac{y^2}{x + y} \rightarrow 3, \quad (x, y) \rightarrow (0, 3)$$

то $f(x, y) \rightarrow e^3$ када $(x, y) \rightarrow (0, 3)$.

1.7.

$$f(x, y) = 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{xy}{2}}{x^2 y^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{xy}{2}}{\frac{xy}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

2.1. За $(x, y) \neq (0, 0)$ је

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|}{|x| + |y|} \cdot |y| \leq |y| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0$$

Како $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, функција f је непрекидна у $(0, 0)$.

2.2. За $(x, y) \neq (0, 0)$ је

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot |y| \leq |x| + |y| \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Како $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, функција f је непрекидна у $(0, 0)$.

2.3. За $(x, y) \neq (0, 0)$ је

$$|f(x, y)| \leq \frac{\max\{|x|, |y|\}^5}{\max\{|x|, |y|\}^4} = \max\{|x|, |y|\} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow (0, 0)$$

Како $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$ када $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, функција f је непрекидна у $(0, 0)$.

Друго решење.

Из неједнакости $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ за $xy \neq 0$ следи

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x^3y^2|}{2x^2y^2} = \frac{|x|}{2} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0$$

За $xy = 0$ је $f(x, y) = 0$.

2.4. Прекиди су у тачкама $(a, -a)$ за $a \in \mathbb{R}$. Како

$$f(x, y) = \frac{2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{x+y} = \frac{\sin \frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \rightarrow \cos a, \quad (x, y) \rightarrow (a, -a)$$

за отклањање прекида треба узети $f(a, -a) = \cos a$.

Специјално, у тачки $(0, 0)$ (за $a = 0$) функција је непрекидна ако је $f(0, 0) = 1$.

2.5. Како је $f(0, y) = 0$ и $f(y^2, y) = 1$, функција f нема граничну вредност у тачки $(0, 0)$.

2.6. Како је $f(0, y) = 0$ и

$$f(x, x^2 - x) = \frac{x(x^2 - x)}{x + x^2 - x} = \frac{x^3 - x^2}{x^2} \rightarrow -1, \quad x \rightarrow 0$$

функција f нема граничну вредност у тачки $(0, 0)$.

3.1.

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$
$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

3.2.

$$\frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$
$$\frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \frac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \begin{cases} 1, & \Delta y > 0 \\ -1, & \Delta y < 0 \end{cases}$$

3.3.

$$f'_x = y^2 e^{x^2+y^4} + xy^2 e^{x^2+y^4} \cdot 2x = y^2(1 + 2x^2)e^{x^2+y^4}$$
$$f'_y = 2xy e^{x^2+y^4} + xy^2 e^{x^2+y^4} \cdot 4y^3 = 2xy(1 + 2y^4)e^{x^2+y^4}$$

3.4.

$$f'_x = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$f'_y = \frac{1}{1 + y^2/x^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

3.5.

$$f'_x = y^z \cdot x^{y^z-1}$$
$$f'_y = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot zy^{z-1}$$
$$f'_z = x^{y^z} \cdot \ln x \cdot y^z \cdot \ln y$$

3.6.

$$f'_x = y + g' \cdot \frac{1}{y}, \quad f'_y = x + g' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$
$$xf'_x + yf'_y = xy + \frac{x}{y}g' + xy - \frac{x}{y}g' = 2xy$$

3.7.

$$f'_x = yx^{y-1}y^x + x^y y^x \ln y = \frac{y}{x}f + f \ln y$$
$$f'_y = x^y \ln x \cdot y^x + x^y \cdot xy^{x-1} = f \ln x + \frac{x}{y}f$$

$$\begin{aligned}
xf'_x + yf'_y &= yf + xf \ln y + yf \ln x + xf \\
&= f(x + y + x \ln y + y \ln x) \\
&= f(x + y + \ln y^x + \ln x^y) \\
&= f(x + y + \ln f)
\end{aligned}$$

4.1. За $xy > 0$ је $f(x, y) = \sqrt{xy}$, па је

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

- f'_x нема граничну вредност у $(0, 0)$, па није непрекидна у $(0, 0)$
- Не може се закључити да је f диференцијабилна у $(0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0, 0)$ ако је

$$\begin{aligned}
\Delta f(0, 0) &= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\
&= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})
\end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0, 0)$.

4.2.

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

• У тачки $(x, y) \neq (0, 0)$ функције f'_x и f'_y су непрекидне, па је f у тој тачки диференцијабилна

- Како је

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ и } y \neq 0 \\ 1/2, & x = y \neq 0 \end{cases}$$

функција f'_x у $(0, 0)$ нема граничну вредност, па се не може закључити да је f диференцијабилна у $(0, 0)$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

По дефиницији, f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако је

$$\begin{aligned} \Delta f(0,0) &= f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \\ &= o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \end{aligned}$$

односно ако

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow 0, \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$$

Међутим,

$$\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \begin{cases} 0, & \Delta x = 0 \text{ и } \Delta y > 0 \\ 1/2\sqrt{2}, & \Delta x = \Delta y > 0 \end{cases}$$

Дакле, f није диференцијабилна у $(0,0)$.

4.3.

$$\begin{aligned} f'_x &= 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x, & f'_y &= 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y \\ df(x,y) &= 6x(x^2 + y^2)dx + 6y(x^2 + y^2)dy \end{aligned}$$

Друго решење.

Ако је $f(x,y) = g(x,y)^3$, где је g функција $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$, тада је

$$df(x,y) = 3g^2 dg = 3g^2 d(x^2 + y^2) = 6g(x,y)(x dx + y dy)$$

4.4. Ако је $f = \sqrt{g}$, тада је

$$df = \frac{1}{2\sqrt{g}} dg = \frac{1}{2\sqrt{g}} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4.5. Ако је $f(x,y) = \sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}$, онда је дати израз једнак $f(\Delta x, \Delta y)$ за $\Delta x = 0.02$ и $\Delta y = -0.03$

Из

$$f'_x = \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}, \quad f'_y = \frac{3(2+y)^2}{2\sqrt{(1+x)^3 + (2+y)^3}}$$

добивамо $f'_x(0,0) = 1/2$ и $f'_y(0,0) = 2$, па је

$$f(\Delta x, \Delta y) \approx f(0,0) + df(0,0) = 3 + \frac{1}{2}\Delta x + 2\Delta y = 3 + 0.01 - 0.06$$

Дати израз је приближно једнак 2.95

5.1.

$$F(x,y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x, \quad F'_x = 2x \ln y - \frac{y^2}{x}, \quad F'_y = \frac{x^2}{y} - 2y \ln x$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x \ln y - y^2/x}{x^2/y - 2y \ln x} = \frac{y^3 - 2xy \ln y}{x^3 - 2xy \ln x}$$

Друго решење.

диференцирањем једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ по x добијамо

$$2x \ln y + \frac{x^2}{y} \cdot y' - 2y \cdot y' \cdot \ln x - y^2 \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$$y' \left(\frac{x^2}{y} - 2y \ln x \right) = \frac{y^2}{x} - 2x \ln y$$

Треће решење.

Применом диференцијала на леву и десну страну једнакости $x^2 \ln y - y^2 \ln x = 0$ добијамо

$$2x dx \ln y + x^2 \frac{dy}{y} - 2y dy \ln x - y^2 \frac{dx}{x} = 0$$

$$dy \left(\frac{x^2}{y} - 2y \ln x \right) = \left(\frac{y^2}{x} - 2x \ln y \right) dx$$

па је $y' = \frac{dy}{dx}$

5.2.

$$F'_x = z^2 - 2xy + 2, \quad F'_y = -x^2 + 2yz - 1, \quad F'_z = 2zx + y^2$$

Како је $z(0,1) = 1$, то је

$$z'_x = -\frac{F'_x(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = -\frac{1-0+2}{1} = -3$$

$$z'_y = -\frac{F'_y(0,1,1)}{F'_z(0,1,1)} = -\frac{-0+2 \cdot 1 \cdot 1-1}{1} = -1$$

5.3. Диференцирањем по x добијамо

$$1 = z'_x G + z G' y \frac{z'_x}{-z^2}, \quad z = z z'_x G - y z'_x G'$$

одакле је

$$z'_x = \frac{z}{zG - yG'}$$

Диференцирањем по y добијамо

$$0 = z'_y G + z G' \frac{z - y z'_y}{z^2}, \quad (yG' - zG) z'_y = G' z$$

одакле је

$$z'_y = \frac{zG'}{yG' - zG}$$

Заменом z'_x и z'_y имамо

$$\begin{aligned} xz'_x + yz'_y &= \frac{xz}{zG - yG'} + \frac{yzG'}{yG' - zG} \\ &= \frac{zx - yzG'}{zG - yG'} \\ &= \frac{z \cdot zG - yzG'}{zG - yG'} \\ &= z \end{aligned}$$

Друго решење.

Из дате једнакости имамо

$$\begin{aligned} dx &= Gdz + zdG = Gdz + zG'd\left(\frac{y}{z}\right) \\ &= Gdz + zG'\frac{zdy - ydz}{z^2} \\ &= Gdz + G'dy - G'\frac{y}{z}dz \end{aligned}$$

Из последње једнакости следи

$$zdx - zG'dy = (zG - yG')dz$$

односно

$$\frac{z}{zG - yG'}dx + \frac{-zG'}{zG - yG'}dy = dz$$

Према томе,

$$z'_x = \frac{z}{zG - yG'}, \quad z'_y = \frac{zG'}{yG' - zG}$$

Даље исто као у првом решењу

Трећи начин.

$$F(x, y, z) = x - zG\left(\frac{y}{z}\right), \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

где је

$$F'_x = 1, \quad F'_y = -zG'\frac{1}{z} = -G', \quad F'_z = -G - zG'y\frac{-1}{z^2} = \frac{-zG + yG'}{z}$$

5.4. Нека је

$$F(x, y, z) = G(\underbrace{x + y + z}_u, \underbrace{2xz + y^2}_v) = 0$$

Тада је

$$F'_x = G'_u \cdot u'_x + G'_v \cdot v'_x = G'_u + 2zG'_v$$

$$F'_y = G'_u \cdot u'_y + G'_v \cdot v'_y = G'_u + 2yG'_v$$

$$F'_z = G'_u \cdot u'_z + G'_v \cdot v'_z = G'_u + 2xG'_v$$

па је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{G'_u + 2zG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{G'_u + 2yG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$

$$\begin{aligned} (y-x)z'_x + (x-z)z'_y &= \frac{(x-y)(G'_u + 2zG'_v) + (z-x)(G'_u + 2yG'_v)}{G'_u + 2xG'_v} \\ &= \frac{G'_u(z-y) + 2xG'_v(z-y)}{G'_u + 2xG'_v} \\ &= z-y \end{aligned}$$

Други начин.

Из $G(u, v) = 0$ следи $dG(u, v) = 0$, односно $G'_u du + G'_v dv = 0$. Како је

$$du = dx + dy + dz, \quad dv = 2xdz + 2zdx + 2ydy$$

то је

$$(G'_u + 2zG'_v)dx + (G'_u + 2yG'_v)dy = -(G'_u + 2xG'_v)dz$$

па је

$$z'_x = -\frac{G'_u + 2zG'_v}{G'_u + 2xG'_v}, \quad z'_y = -\frac{G'_u + 2yG'_v}{G'_u + 2xG'_v}$$

Даље исто као у првом решењу.

5.5. Диференцирањем датих једнакости по x добијамо

$$y + u'_x v + uv'_x = 0, \quad v + v'_x - yu'_x = 0$$

За тачку $(1, -1)$ имамо систем

$$2u'_x + v'_x = 1, \quad u'_x + v'_x = -2$$

из којег следи $u'_x(1, -1) = 3$ и $v'_x(1, -1) = -5$.

Диференцирањем датих једнакости по y добијамо

$$x + u'_y v + uv'_y = 0, \quad v'_y - u - yu'_y = 0$$

За тачку $(1, -1)$ имамо систем

$$2u'_y + v'_y = -1, \quad u'_y + v'_y = 1$$

из којег следи $u'_y = -2$ и $v'_y = 3$. Дакле,

$$du(1, -1) = u'_x dx + u'_y dy = 3dx - 2dy$$

$$dv(1, -1) = v'_x dx + v'_y dy = -5dx + 3dy$$

6.1.

$$\begin{aligned} \frac{f(0 + tl_x, 0 + tl_y) - f(0, 0)}{t} &= \frac{f(tl_x, tl_y) - 0}{t} = \frac{\sqrt{|t^2 l_x^2 - t^2 l_y^2|}}{t} \\ &= \frac{\sqrt{t^2 |l_x^2 - l_y^2|}}{t} = \frac{|t|}{t} \cdot \sqrt{|l_x^2 - l_y^2|} \end{aligned}$$

$f'_t(0, 0)$ постоји ако је $\sqrt{|l_x^2 - l_y^2|} = 0$, односно $l_x^2 = l_y^2$

$f'_t(0, 0)$ постоји у правцима $y = x$ и $y = -x$

6.2.

$$\frac{f(tl_x, tl_y) - f(0, 0)}{t} = \frac{\sqrt[3]{t^2 l_x^2 \cdot tl_y} - 0}{t} = \frac{\sqrt[3]{t^3 l_x^2 l_y}}{t} = \sqrt[3]{l_x^2 l_y}$$

$$f'_t(0, 0) = \sqrt[3]{l_x^2 l_y}$$

6.3. f је диференцијабилна у R^2 , $\vec{AB} = (1, 2)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{5}$

$$f'_{\vec{AB}}(A) = \nabla f(A) \cdot l, \quad l = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$$

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y, 2y - 3x + 1)$$

$$\nabla f(A) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1), 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 1) = (5, -4)$$

$$f'_{AB}(A) = (5, -4) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

7.1. $\underbrace{xy^2 + z^3 - 12}_{F(x,y,z)} = 0$

$$F'_x(x, y, z) = y^2, \quad F'_y(x, y, z) = 2xy, \quad F'_z(x, y, z) = 3z^2$$

$$F'_x(M) = 4, \quad F'_y(M) = 4, \quad F'_z(M) = 12, \quad n_\alpha = (1, 1, 3)$$

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 2) = 0, \quad x + y + 3z - 9 = 0$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{3}$$

8.1.

$$f'_x = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{x^2} = y^2 \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$f''_{xy} = \frac{2y(x^2 + y^2)^{3/2} - y^2 \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2yx^2 - y^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$f'_y = x \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$f''_{y^2} = \frac{x(x^2 + y^2)^{3/2} - xy \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2xy^2 - x^3}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

8.2.

$$f'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''_{x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''_{y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = 0$$

8.3.

$$f'_x = \frac{2y(x^2 + y^2) - 2xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, \Delta y) - f'_x(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta y^3}{\Delta y^4} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta y^2} = +\infty$$

8.4.

$$f'_x = 3x^2y^3 - 6xy + 3y^2, \quad f'_y = 3x^3y^2 - 3x^2 + 6xy$$

$$\begin{aligned}
f''_{x^2} &= 6xy^3, & f''_{x^2} &= 6xy^3 - 6y, & f''_{xy} &= 9x^2y^2 - 6x + 6y \\
f'''_{x^3} &= 6y^3, & f'''_{x^2y} &= 18xy^2 - 6, & f'''_{xy^2} &= 18x^2y + 6 \\
f''_{y^2} &= 6x^3y + 6x, & f'''_{y^3} &= 6x^3 \\
d^2f &= (6xy^3 - 6y)dx^2 + 2(9x^2y^2 - 6x + 6y)dxdy + (6x^3y + 6x)dy^2 \\
d^3f &= 6y^3dx^3 + 3(18xy^2 - 6)dx^2dy + 3(18x^2y + 6)dxdydy + 6x^3dy^3
\end{aligned}$$

9.1.

$$\begin{aligned}
T_2(x, y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A) \\
f'_x &= yx^{y-1}, & f''_{x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, & f''_{xy} &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x, \\
f''_{y^2} &= x^y \ln x, & f'''_{y^2} &= x^y \ln^2 x \\
f(A) &= f'_x(A) = f''_{xy}(A) = 1, & f''_{x^2}(A) &= f'_y(A) = f'''_{y^2}(A) = 0 \\
T_2(x, y) &= 1 + \Delta x + \frac{1}{2} \cdot 2\Delta x \Delta y = 1 + x - 1 + (x-1)(y-1) = 1 - y + xy
\end{aligned}$$

Дакле, у околини тачке A је $x^y \approx 1 - y + xy$.

9.2.

$$\begin{aligned}
M_2(x, y) &= f(0, 0) + df(0, 0) + \frac{1}{2}d^2f(0, 0), & f(0, 0) &= \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \\
f'_x &= \frac{1}{1 + \frac{(1+x+y)^2}{(1-x+y)^2}} \cdot \frac{1-x+y+1+x+y}{(1-x+y)^2} = \frac{2+2y}{(1-x+y)^2 + (1+x+y)^2}
\end{aligned}$$

За $x = 0$ и $y = 0$ имамо $f'_x(0, 0) = 0$. Слично се добија

$$\begin{aligned}
f'_y(0, 0) &= f''_{x^2}(0, 0) = f''_{y^2}(0, 0) = 0, & f''_{xy}(0, 0) &= -1 \\
T_2(x, y) &= \frac{\pi}{4} + 1 \cdot dx + \frac{1}{2}(0 \cdot dx^2 + 2(-1)dxdy + 0 \cdot dy^2) = \frac{\pi}{4} + x - xy
\end{aligned}$$

9.3. За $t = -x^2 - y^2$ је $f(x, y) = (1+t)^{1/2} = g(t)$. Како је Маклоренов полином другог реда за g дат са

$$M_2(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}t^2 = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1/2(1/2-1)}{2}t^2 = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2,$$

то је

$$M_4(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{4}x^2y^2$$

Узимањем већег степена за Маклоренов полином функције g добијамо степене x и y веће од 4.

9.4.

$$T_2(x, y) = T_2(-1 + \Delta x, 0 + \Delta y) = f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A), \quad f(A) = 1$$

Диференцирањем дате једнакости по x (по y) добијамо

$$2x - 2zz'_x - yz - xyz'_x = 0, \quad 2y - 2zz'_y - xz - xyz'_y = 0$$

За $x = -1$, $y = 0$ и $z = 1$ следи $\boxed{z'_x(A) = -1}$ и $\boxed{z'_y(A) = 1/2}$.

Диференцирањем прве добијене једнакости по x имамо

$$2 - 2z'_x z'_x - 2zz''_{x^2} - yz'_x - yz'_x - xy z''_{x^2} = 0$$

У тачки A је $2 - 2 - 2z''_{x^2} = 0$, па је $z''_{x^2}(z) = 0$.

Диференцирањем исте једнакости по y имамо

$$-2z'_y z'_x - 2zz''_{xy} - z - yz'_y - xz'_x - xy z''_{xy} = 0$$

У тачки A је $1 - 2z''_{xy} - 1 - 1 = 0$, па је $z''_{xy}(A) = -1/2$.

Диференцирањем друге добијене једнакости по y имамо

$$2 - 2z'_y z'_y - 2zz''_{y^2} - xz'_y - xz'_y - xy z''_{y^2} = 0$$

У тачки A је $2 - 1/2 - 2 \cdot z''_{y^2} + 1/2 + 1/2 = 0$, па је $z''_{y^2}(A) = 5/4$

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\ &= z(A) + z'_x dx + z'_y dy + \frac{1}{2}(z''_{x^2}(A)dx^2 + 2z''_{xy}(A)dxdy + z''_{y^2}(A)dy^2) \\ &= 1 - dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}\left(0 - 2 \cdot \frac{1}{2}dxdy + \frac{5}{4}dy^2\right) \\ &= 1 - \Delta x + \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{2}\Delta x \Delta y + \frac{5}{8}(\Delta y)^2 \\ &= 1 - (x+1) + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(x+1)y + \frac{5}{8}y^2 \\ &= -x - \frac{1}{2}xy + \frac{5}{8}y^2 \end{aligned}$$

10.1.

$$f(x, 0) = x^3 \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(0, 0) = 0$$

Како је $f(x, 0) > f(0, 0)$ за $x > 0$ и $f(x, 0) < f(0, 0)$ функција f нема локално екстремум у тачки $(0, 0)$.

10.2. $f(x, 0) = 2x^2 > 0 = f(0, 0)$ - по x оси је локални минимум

$f(0, y) = y^4 > f(0, 0)$ - по y оси је локални минимум

А по правој $y = kx$? Ако је $f(x, kx) = 2x^2 - 3k^2x^3 + k^4x^4 = \varphi(x)$, тада је $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = 4 > 0$, па f по свакој правој $y = kx$ има локални минимум у $(0, 0)$.

Али, због

$$f(2y^2/3, y) = 2 \cdot \frac{4}{9}y^4 - 3 \cdot \frac{2}{3}y^2 \cdot y^2 + y^4 = -\frac{1}{9}y^4 < 0 = f(0, 0)$$

функција f нема локални екстремум у $(0, 0)$.

10.3. f диференцијабилна у R^2 , $df(x, y) = (2x, -2y)$

$df(x, y) = 0$ само у тачки $(0, 0)$

Једина стационарна тачка је $(0, 0)$

Међутим, тачка $(0, 0)$ није тачка локалног екстремума, јер је $f(x, 0) > 0$ и $f(0, y) < 0$.

10.4. f'_x не постоји у тачкама $(0, y)$ - то су критичне тачке

$f'_y(x, y) = 2y$, $f'_y = 0$ у тачкама $(x, 0)$. Како је $f'_x(x, 0) = 1$ за $x > 0$ и $f'_x(x, 0) = -1 < 0$ за $x < 0$, једина стационарна тачка је $(0, 0)$.

У критичним тачкама постоји f'_y , при чему је $f'_y \neq 0$ за $y \neq 0$

Дакле, остаје само тачка $(0, 0)$ за могући ЛЕ

Из $f(0, 0) = 0$ и $f(x, y) > 0$ за $(x, y) \neq (0, 0)$ следи да је у $(0, 0)$ локални минимум.

10.5. $f'_x = 3x^2 - 3$, $f'_y = -6y^2 + 6$

За стационарне тачке $3x^2 - 3 = 0$, $-6y^2 + 6 = 0$; $x^2 = y^2 = 1$

Стационарне тачке су $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(-1, 1)$, $D(-1, -1)$.

Да ли су у њима ЛЕ? $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{y^2} = -12y$

У тачки A : $d^2f = 6dx^2 - 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

У тачки B : $d^2f = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — min

У тачки C : $d^2f = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) — max

У тачки D : $d^2f = -6dx^2 + 12dy^2$ мења знак — нема ЛЕ

Дакле, $f_{\min} = f(B) = -6$, $f_{\max} = f(C) = 6$

10.6.

$$f'_x = 2xe^{-x^2-y^2}(1-x^2-2y^2), \quad f'_y = 2ye^{-x^2-y^2}(2-x^2-2y^2)$$

Стационарне тачке ?

$$x(1-x^2-2y^2) = 0, \quad y(2-x^2-2y^2) = 0$$

1. $x = 0, y = 0 - A(0, 0)$
2. $x = 0, 2 - x^2 - 2y^2 = 0 - B(0, 1), C(0, -1)$
3. $1 - x^2 - 2y^2 = 0, y = 0 - D(1, 0), E(-1, 0)$

Довољни услови ?

$f(A) = 0$, $f(P) > 0$ за $P \neq A - f$ у A има локални минимум

B, C, D, E ?

$$f''_{x^2} = 2e^{-x^2-y^2}(1-5x^2-2y^2+2x^4+4x^2y^2)$$

$$f''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(-3+x^2+2y^2)$$

$$f''_{y^2} = 2e^{-x^2-y^2}(2-10y^2-x^2+2x^2y^2+4y^4)$$

$$B, C : a = f''_{x^2} = -2e^{-1}, \quad b = f''_{x^2} = 0, \quad c = f''_{y^2} = -8e^{-1}$$

$$ac - b^2 = 16e^{-2} > 0, \quad a < 0 \text{ — } f_{\max} = f(B) = f(C) = 2/e$$

$$D, E : a = f''_{x^2} = -4e^{-1}, \quad b = f''_{x^2} = 0, \quad c = f''_{y^2} = 2e^{-1}$$

$$ac - b^2 = -8e^{-2} < 0 \text{ — } f \text{ нема ЛЕ у } D \text{ и } E$$

10.7. Нека је

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 7z$$

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{10x - 2y - 2z}{10z - 2x - 2y} = -\frac{5x - y - z}{5z - x - y}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{10y - 2x - 2z}{10z - 2x - 2y} = -\frac{5y - x - z}{5z - x - y}$$

Из система

$$5x - y - z = 0, \quad 5y - x - z = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

добијамо: $y = x$ (одузимањем прве две), $z = 4x$, $x = \pm 1$ (из $F = 0$)

Стационарне тачке су: $A(1, 1)$ (са $z(A) = 4$) и $B(-1, -1)$ (са $z(B) = -4$)

Да ли су у A и B ЛЕ?

$$z''_{x^2} = -\frac{(5 - z'_x)(5z - x - y) - \overbrace{(5x - y - z)}^{=0(A),(B)}(5z'_x - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{x^2}(A) = -\frac{5(20 - 1 - 1)}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{x^2}(B) = -\frac{5(-20 + 1 + 1)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

$$z''_{xy} = -\frac{(-1 - z'_y)(5z - x - y) - \overbrace{(5x - y - z)}^{=0(A),(B)}(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{xy}(A) = -\frac{-1 \cdot 18}{18^2} = \frac{1}{18} = z''_{yx}(A), \quad z''_{xy}(B) = z''_{yx}(B) = -\frac{1}{18}$$

$$z''_{y^2} = -\frac{(5 - z'_y)(5z - x - y) - \overbrace{(5y - x - z)}^{=0(A),(B)}(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{y^2}(A) = -\frac{5 \cdot 18}{18^2} = -\frac{5}{18}, \quad z''_{y^2}(B) = -\frac{5 \cdot (-18)}{18^2} = \frac{5}{18}$$

A : $ac - b^2 = 5^2/18^2 - 1/18^2 = 24/18^2 > 0$, $a = -5/18 < 0$ — $f_{\max} = f(A) = 4$

B : $ac - b^2 = 5^2/18^2 - (-1)^2/18^2 = 24/18^2 > 0$, $a = 5/18 > 0$ — $f_{\min} = f(B) = -4$

10.8.

$$f'_x = 4x - y + 2z, \quad f'_y = -x - 1 + 3y^2, \quad f'_z = 2x + 2z$$

За стационарне тачке:

$$x + z = 0, \quad 3y^2 = x + 1, \quad y = 4x + 2z$$

$$z = -x, \quad y = 4x - 2x = 2x, \quad 3 \cdot 4x^2 = x + 1, \quad 12x^2 - x - 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{4}$$

Стационарне тачке су: $A(1/3, 2/3, -1/3)$ и $B(-1/4, -1/2, 1/4)$

Да ли су у њима ЛЕ ?

$$f''_{x^2} = 4, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = -1, \quad f''_{xz} = f''_{zx} = 2, \quad f''_{y^2} = 6y, \quad f''_{yz} = f''_{zy} = 0, \quad f''_{z^2} = 2$$

У тачки A :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 4, \quad m_2 = 15, \quad m_3 = 14$$

Дакле, $f_{\min} = f(A)$

У тачки B :

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 4, \quad m_2 = -13$$

Дакле, функција f у тачки B нема ЛЕ. Из

$$d^2f(B) = \begin{cases} 4dx^2, & dy = dz = 0, \quad dx \neq 0 \\ -3dy^2, & dx = dz = 0, \quad dy \neq 0 \end{cases}$$

видимо да $d^2 f(B)$ заиста мења знак.

10.9.

$$f'_x = yz - \frac{1}{x^2}, \quad f'_y = xz - \frac{1}{y^2}, \quad f'_z = xy - \frac{1}{z^2}$$

За стационарне тачке

$$yz = \frac{1}{x^2}, \quad xz = \frac{1}{y^2}, \quad xy = \frac{1}{z^2}$$

$$x \cdot xyz = y \cdot xyz = z \cdot xyz, \quad x = y = z, \quad x^4 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

Стационарне тачке: $A(1, 1, 1)$ и $B(-1, -1, -1)$

$$f''_{x^2} = \frac{2}{x^3}, \quad f''_{y^2} = \frac{2}{y^3}, \quad f''_{z^2} = \frac{2}{z^3}, \quad f''_{xy} = z, \quad f''_{xz} = y, \quad f''_{yz} = x$$

У тачки A :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 4.$$

Дакле, $f_{\min} = f(A)$

У тачки B :

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad m_1 = -2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = -4$$

Дакле, $f_{\max} = f(B)$

10.10.

$$f'_x = yz(4 - x - y - z) - xyz, \quad f'_y = xz(4 - x - y - z) - xyz, \quad f'_z = xy(4 - x - y - z) - xyz$$

Стац. т.: $A(0, 0, 0)$ и $B(1, 1, 1)$

Довољни услови

$$f''_{x^2} = -2yz, \quad f''_{y^2} = -2xz, \quad f''_{z^2} = -2xy, \quad f''_{xy} = z(4 - 2x - 2y - z) \\ f''_{yz} = x(4 - x - 2y - 2z), \quad f''_{xz} = y(4 - 2x - y - 2z)$$

У тачки A је $d^2 f(A) = 0$. Како знак прираштаја $\Delta f(A) = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot (4 - \Delta x - \Delta y - \Delta z)$ може да буде и $+$ и $-$, функција у тачки A нема ЛЕ

У тачки B је

$$M = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Како је $m_1 = -2 < 0$, $m_2 = 3 > 0$, $m_3 = -4 < 0$, функција у тачки B има локални максимум.

11.1.

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

$$F'_x = y + 2\lambda x, \quad F'_y = x + 2\lambda y$$

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda x = -y \\ 2\lambda y = -x \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Пошто је $xy \neq 0$ (у противном $x = y = 0$, што не може због $x^2 + y^2 = 2$), то је $x^2 = y^2$, па је $x^2 = 1$.

За $y = x$ је $\lambda = -1/2$, а за $y = -x$ је $\lambda = 1/2$.

Стационарне тачке су: $A(1, 1), B(1, -1), C(-1, 1), D(-1, -1)$ за f ,

односно $A^*(1, 1, -0.5), B^*(1, -1, 0.5), C^*(-1, 1, 0.5), D^*(-1, -1, -0.5)$ за F

Провера довољног услова за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 1, \quad F''_{y^2} = 2\lambda, \quad d^2F(x, y) = 2\lambda dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2$$

У тачкама A^* и D^* је

$$d^2F(A^*) = d^2F(D^*) = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx - dy)^2 \leq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2 + y^2 = 2$ следи $2xdx + 2ydy = 0$, $dx + dy = 0$, $dy = -dx \neq 0$, па је $d^2F(A^*) = d^2F(D^*) = -4dx^2 < 0$ – локални максимум

f при $\varphi = 0$ у A и D има локални условни максимум

У тачкама B^* и C^* је

$$d^2F(B^*) = d^2F(C^*) = dx^2 + 2dxdy + dy^2 = (dx + dy)^2 \geq 0$$

из чега се не може закључити о ЛЕ. Али из $x^2 + y^2 = 2$ следи $2xdx + 2ydy = 0$, $dx - dy = 0$, $dy = dx \neq 0$, па је $d^2F(B^*) = d^2F(C^*) = 4dx^2 > 0$ – локални минимум

f при $\varphi = 0$ у B и C има локални условни минимум

11.2.

$$F = f + \lambda\varphi = x^2 + y^2 - 2xy + \lambda(3x^2 + y^2 - 12)$$

$$F'_x(x, y) = 2x - 2y + 6\lambda x, \quad F'_y(x, y) = 2y - 2x + 2\lambda y$$

Из $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $\varphi = 0$ имамо систем

$$x - y + 3\lambda x = 0, \quad y - x + \lambda y = 0, \quad 3x^2 + y^2 = 12$$

Сабирањем прве две једначине добијамо $\lambda(3x + y) = 0$

За $\lambda = 0$ је $x = y$, $x^2 = 3$

СТ: $A^*(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)$ и $B^*(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$

За $3x + y = 0$ је $y = -3x$, $x^2 = 1$, $\lambda = -4/3$,

СТ: $C(1, -3, -4/3)$ и $D(-1, 3, -4/3)$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2}(x, y) = 2 + 6\lambda, \quad F''_{xy}(x, y) = -2, \quad F''_{y^2}(x, y) = 2 + 2\lambda$$

$$d\varphi = 6xdx + 2ydy, \quad d\varphi(A) = 6\sqrt{3}dx + 2\sqrt{3}dy, \quad d\varphi(C) = 6dx - 2 \cdot 3dy$$

За тачке A и B је $dy = -3dx$, па је за $dx \neq 0$

$$d^2F(A^*) = d^2F(B^*) = 2(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = 2(dx - dy)^2 = 32dx^2 > 0$$

f при $\varphi = 0$ има у тачкама $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и $B(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ локални минимум једнак 0

За тачке C и D је $dy = dx$, па је за $dx \neq 0$

$$d^2F(C^*) = d^2F(D^*) = -6dx^2 - 4dxdy - \frac{2}{3}dy^2 = -\frac{32}{3}dx^2 < 0$$

f при $\varphi = 0$ има у тачкама $C(1, -3)$ и $D(-1, 3)$ локални максимум једнак 16

11.3.

$$F(x, y, z, \lambda) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 1)$$

$$F'_x = 6x + \lambda, \quad F'_y = 6y + \lambda, \quad F'_z = 2z + \lambda$$

Из система

$$6x + \lambda = 0, \quad 6y + \lambda = 0, \quad 2z + \lambda = 0, \quad x + y + z = 1$$

следи

$$\lambda \neq 0, \quad y = x, \quad z = 3x, \quad x + x + 3x = 1, \quad x = 1/5$$

СТ: $A(1/5, 1/5, 3/5)$, $\lambda = -6/5$ (за f), $A^*(1/5, 1/5, 3/5, -6/5)$ (за F)

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 6, \quad F''_{z^2} = 2, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0, \quad d^2F(A^*) = 6dx^2 + 6dy^2 + 2dz^2 > 0$$

$$f_{\min} = f(A) = 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 3 \cdot \frac{1}{5^2} + 9 \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{15}{5^2} = \frac{3}{5}$$

11.4.

$$F(x, y, z, \lambda) = x + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$F'_x = 1 + 2\lambda x, \quad F'_y = 2\lambda y, \quad F'_z = 1 + 2\lambda z$$

Из система $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ следи

$$\lambda \neq 0, \quad y = 0, \quad x = z, \quad 2x^2 = 1, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Стац. т.: $A^* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ и $B^* \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = -2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$

$$d^2F = -2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$d^2F(A^*) < 0$ па је у тачки $A \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ условни локални максимум

$d^2F(B^*) > 0$ па је у тачки $B \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ условни локални минимум

11.5.

$$F(x, y, z, \lambda) = 2x + y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36)$$

$$F'_x = 2 + 2\lambda x, \quad F'_y = 1 + 2\lambda y, \quad F'_z = -2 + 2\lambda z$$

Из система

$$1 + \lambda x = 0, \quad 1 + 2\lambda y = 0, \quad -1 + \lambda z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

следи

$$\lambda \neq 0, \quad \lambda x = -\lambda z, \quad x = -z, \quad z = -2y, \quad 4y^2 + y^2 + 4y^2 = 36, \quad y^2 = 4, \quad y = \pm 2$$

СТ: $A(4, 2, -4)$ ($\lambda = -1/4$) и $B(-4, -2, 4)$ ($\lambda = 1/4$)Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = F''_{xz} = 0$$

$$d^2F(A^*) = -\frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \max$$

$$d^2F(B^*) = \frac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0, \quad \min$$

f при $\varphi = 0$ у тачки A има локални условни максимум

f при $\varphi = 0$ у тачки B има локални условни минимум

11.6.

$$F(x, y, z, \lambda) = x + y + z + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \right) = f + \lambda \varphi$$

$$F'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2}, \quad F'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2}, \quad F'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2}$$

Из $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ следи $x^2 = y^2 = z^2$.

За $x = y = z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 3$. Стационарна тачка је $A(3, 3, 3)$ са $\lambda = 9$.

За $x = y = -z$ из $\varphi = 0$ добија се $x = 1$. Стационарна тачка је $B(1, 1, -1)$ са $\lambda = 1$.

За $x = z = -y$ добија се стационарна тачка $C(1, -1, 1)$, а за $x = -y = -z$ добија се стационарна тачка $D(-1, 1, 1)$.

Провера довољног услова за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = \frac{2\lambda}{x^3}, \quad F''_{y^2} = \frac{2\lambda}{y^3}, \quad F''_{z^2} = \frac{2\lambda}{z^3}, \quad F''_{xy} = F''_{xz} = F''_{yz} = 0$$

У тачки A^* је $d^2F(A^*) = \frac{2}{3}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0$, па

функција f у тачки A има локални условни минимум, $f_{\min} = F(A) = 9$

У тачки B^* је $d^2F(B^*) = 2(dx^2 + dy^2 - dz^2)$. Из услова $\varphi = 0$ следи $\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} + \frac{dz}{z^2} = 0$, што за тачку B даје $dz = -dx - dy$, односно $dz^2 = dx^2 + dy^2 + 2dxdy$. Заменом у d^2F добијамо

$$d^2F(B^*) = -4dxdy \begin{cases} < 0, & dx = dy \neq 0 \\ > 0, & dy = -dx \neq 0 \end{cases}$$

Према томе, у тачки B није локални условни екстремум.

Слично се показује да и у тачкама C и D није ЛУЕ.

11.7.

$$F(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$$

$$F'_x + y + 2z + \lambda yz, \quad F'_y = x + 2z + \lambda xz, \quad F'_z = 2x + 2y + \lambda xy$$

Систем за СТ

$$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} xy + 2zx + 4\lambda = 0 \\ xy + 2zy + 4\lambda = 0 \\ 2xz + 2yz + 4\lambda = 0 \\ xyz = 4 \end{cases}$$

Из прве две јед. је $y = x$, а из друге и треће јед. је $y = 2z$. Из четврте јед. следи $z = 1$.

СТ: $A(2, 2, 1)$ са $\lambda = -2$

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = 1 + \lambda z, \quad F''_{xz} = 2 + \lambda y, \quad F''_{yz} = 2 + \lambda x$$

$$yzdx + zxdy + xydz = 0, \quad 2dx + 2dy + 4dz = 0, \quad 2dz = -dx - dy = -(dx + dy)$$

$$\begin{aligned}
d^2F(A^*) &= 2((1-2)dxdy + (2-4)dxdz + (2-4)dydz) \\
&= 2(-dxdy - 2dxdz - 2dydz) \\
&= 2(-dxdy - 2z(dx+dy)) \\
&= 2(-dxdy + (dx+dy)^2) \\
&= dx^2 + dy^2 + (dx+dy)^2 > 0
\end{aligned}$$

за $dx^2 + dy^2 \neq 0$.

f при услову $xyz = 4$ има у тачки A локални условни минимум

11.8.

$$\begin{aligned}
F(x, y, z, \lambda) &= xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3) \\
F'_x &= yz + 2\lambda x, \quad F'_y = xz + 2\lambda y, \quad F'_z = xy + 2\lambda z
\end{aligned}$$

Систем за СТ

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} xyz + 2\lambda x^2 = 0 \\ yxz + 2\lambda y^2 = 0 \\ zxy + 2\lambda z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Следи $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ што даје 8 СТ

За $\lambda = -1/2$ СТ: $A(1, 1, 1)$, $C(1, -1, -1)$, $D(-1, 1, -1)$, $E(-1, -1, 1)$

За $\lambda = 1/2$ СТ: $B(-1, -1, -1)$, $F(-1, 1, 1)$, $G(1, -1, 1)$, $H(1, 1, -1)$

Довољни услови

$$\begin{aligned}
F''_{x^2} &= F''_{y^2} = F''_{z^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = z, \quad F''_{xz} = y, \quad F''_{yz} = x \\
d^2F &= 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2zdx dy + 2ydx dz + 2xdy dz
\end{aligned}$$

У тачки A је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned}
d^2F(A^*) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2dxdy + 2dxdz + 2dydz \\
&= -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)dz \\
&= -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dx + dy)^2 < 0
\end{aligned}$$

f у тачки A има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$

У тачки C је $dx = dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned}
d^2F(C^*) &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz \\
&= -(dx - dy)^2 - dz^2 - 2(dy + dz)^2 < 0
\end{aligned}$$

f у тачки C има локални условни максимум, $f_{\max} = f(A) = 1$

Слично важи и тачкама D и E

У тачки B је $dx + dy + dz = 0$, па је

$$\begin{aligned}
d^2F(B^*) &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz \\
&= (dx - dy)^2 + dz^2 + 2(dx + dy)^2 > 0
\end{aligned}$$

f у тачки B има локални условни минимум, $f_{\min} = f(B) = -1$

Слично важи и тачкама F , G и H

11.9.

$$F = f + \alpha\varphi + \beta\psi, \quad \varphi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2, \quad \psi(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2$$
$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = x + 2y + z + \alpha(2x^2 + y^2 - z^2 - 2) + \beta(y^2 + z^2 - 2)$$

Систем за СТ

$$1 + 4\alpha x = 0, \quad 2 + 2\alpha y + 2\beta y = 0, \quad 1 - 2\alpha z + 2\beta z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

Из прве три једначине следи

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha + \beta \neq 0, \quad \alpha - \beta \neq 0, \quad x = -\frac{1}{4\alpha}, \quad y = -\frac{1}{\alpha + \beta}, \quad z = \frac{1}{2(\alpha - \beta)}$$

Из $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ следи $x^2 = z^2$, при чему $x = -z$ не може јер би тада било $\alpha + \beta = 0$ (из претходних израза за x и z).

Дакле, $x = z$ што повлачи $\beta = 3\alpha$, односно $y = x$.

СТ: $A(1, 1, 1)$ са $\alpha = -1/4$, $\beta = -3/4$

и $B(-1, -1, -1)$ са $\alpha = 1/4$ и $\beta = 3/4$

Довољни услови за ЛУЕ

$$d^2F = 4\alpha dx^2 + 2(\alpha + \beta)dy^2 + 2(\beta - \alpha)dz^2$$
$$d^2F(1, 1, 1, -1/4, -3/4) = -dx^2 - 2dy^2 - dz^2 < 0, \quad \min$$
$$d^2F(-1, -1, -1, 1/4, 3/4) = dx^2 + 2dy^2 + dz^2 < 0, \quad \max$$

Ове неједнакости важе и на подпростору у којем је

$$2dx + dy - dz = 0, \quad dy + dz = 0$$

f при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ има у тачки A локални условни минимум

f при $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ има у тачки B локални условни максимум

11.10.

$$F = f + \alpha(x^2 + y^2 - 2) + \beta(x + z - 2)$$

Из система за СТ за $x = y = z$ добијамо $\alpha = -1/2$ и $\beta = -1$.

Довољни услови за ЛУЕ

$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\alpha, \quad F''_{z^2} = F''_{xz} = 0, \quad F''_{xy} = F''_{yz} = 1$$
$$d^2F(A^*) = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz$$

Како је $dz = -dy$ и $dx = -dy$ у тачки A , то је

$$d^2F(A^*) = -(dx - dy)^2 + 2dydz = -4dy^2 - 2dy^2 = -6dy^2 < 0, \quad \max$$

12.1. Локални екстремуми у унутрашњости области \mathcal{D}

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = -2y, \quad \text{стац.т. } \boxed{A(0, 0)}$$

На граници области

$$F = f + \lambda(x^2 + y^2 - 2), \quad F'_x = 2x + 2\lambda x, \quad F'_y = -2y + 2\lambda y$$

Из система

$$x + \lambda x = 0, \quad -y + \lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

односно

$$x(1 + \lambda) = 0, \quad y(\lambda - 1) = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

добијамо

1. $x = 0, \lambda = 1, y^2 = 4, y = \pm 2, \boxed{B(0, 2)}, \boxed{C(0, -2)}$

2. $1 + \lambda = 0, y = 0, x^2 = 4, x = \pm 2, \boxed{D(2, 0)}, \boxed{E(-2, 0)}$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E
$f(X)$	0	-4	-4	4	4

$$\max_{\mathcal{D}} f = f(D) = f(E) = 4, \quad \min_{\mathcal{D}} f = f(B) = f(C) = -4$$

12.2. Локални екстремуми у унутрашњости области \mathcal{D}

$$\begin{aligned} f'_x &= e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}(4x) \\ &= 2x(2-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y &= e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x^2+3y^2) + e^{-x^2-y^2}(6y) \\ &= 2y(3-2x^2-3y^2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

$$x(2-2x^2-3y^2) = 0, \quad y(3-2x^2-3y^2) = 0$$

СТ: $A(0, 0), B(0, 1), C(0, -1), D(1, 0)$ и $E(-1, 0)$

На граници области

$$L = f + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$L'_x = 2x \left(e^{-x^2-y^2}(2-2x^2-3y^2) + \lambda \right), \quad L'_y = 2y \left(e^{-x^2-y^2}(3-2x^2-3y^2) + \lambda \right)$$

$$L'_x = 0, \quad L'_y = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

СТ на кружности: $F(0, 2), G(0, -2), H(2, 0), I(-2, 0)$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$f(X)$	0	$3e^{-1}$	$3e^{-1}$	$2e^{-1}$	$2e^{-1}$	$12e^{-4}$	$12e^{-4}$	$8e^{-4}$	$8e^{-4}$

$$\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(B) = f(C) = \frac{3}{e}, \quad \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = f(A) = 0.$$

12.3. Локални екстремуми у унутрашњости области \mathcal{D}

$$f'_x = y - 2xy - \frac{1}{2}y^2, \quad f'_y = x - x^2 - xy$$

$$y(1 - 2x - y/2) = 0, \quad x(1 - x - y) = 0$$

СТ: $(0, 0) \notin \text{Int}(\mathcal{D}), (0, 2) \notin \text{Int}(\mathcal{D}), (1, 0) \notin \text{Int}(\mathcal{D}), \boxed{A(1/3, 2/3)}$

На граници области D

За $x = 0$ је $f(0, y) = 0$ За $y = 0$ је $f(x, 0) = 0$

За $x = 1$ је $f(1, y) = -\frac{1}{2}y^2$ (опада на $[0, 2]$)

За $y = 2$ је $f(x, 2) = -2x^2$ (опада на $[0, 1]$)

Заједничке граничне тачке

$B(0, 0)$ $C(0, 1)$ $D(0, 2)$ $E(1, 2)$

X	A	B	C	D	E
$f(X)$	$2/27$	0	0	0	-2

$\max_D f = f(A) = \frac{2}{27}, \quad \min_D f = f(E) = -2$

12.4. ЛЕ унутар области

$f'_x = 2x - y, f'_y = -x + 2y; 2x = y, 2y = x; \text{ Стац.т.: } A(0, 0)$

На граници $y = -x + 1$

$$\begin{aligned} f(x, -x + 1) &= x^2 - x(-x + 1) + x^2 + 1 - 2x \\ &= 3x^2 - 3x + 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$g'(x) = 6x - 3, \text{ Стац.т.: } B(1/2, 1/2)$

На граници $y = x + 1$

$$\begin{aligned} f(x, x + 1) &= x^2 - x(x + 1) + x^2 + 1 + 2x \\ &= x^2 + x + 1 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$h'(x) = 2x + 1, \text{ Стац.т.: } C(-1/2, 1/2)$

На граници $y = -x - 1$

$$\begin{aligned} f(x, -x - 1) &= x^2 + x(x + 1) + x^2 + 1 + 2x \\ &= 3x^2 + 3x + 1 \\ &= u(x) \end{aligned}$$

$u'(x) = 6x + 3, \text{ Стац.т.: } D(-1/2, -1/2)$

На граници $y = x - 1$

$$\begin{aligned} f(x, x - 1) &= x^2 - x(x - 1) + x^2 + 1 - 2x \\ &= x^2 - x + 1 \\ &= v(x) \end{aligned}$$

$v'(x) = 2x - 1, \text{ Стац.т.: } E(1/2, -1/2)$

Заједничке граничне тачке

$$\boxed{F(1,0)} \quad \boxed{G(-1,0)} \quad \boxed{H(0,1)} \quad \boxed{I(0,-1)}$$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$f(X)$	0	1/4	3/4	1/4	3/4	1	1	1	1

$$\max_D f = f(F) = f(G) = f(H) = f(I) = 1, \quad \min_D f = f(A) = 0$$

12.5. Граница области

$$|y - 1| = \begin{cases} y - 1, & y \geq 1 \\ 1 - y, & y < 1 \end{cases}$$

За $y \geq 1$ имамо $x - 4 \leq -(y - 1)$, $y \leq -x + 5$

За $y < 1$ имамо $x - 4 \leq -(1 - y)$, $y \geq x - 3$

Граница је одређена правима $p_1 : y = -x + 5$, $p_2 : y = x - 3$ и $p_3 : x = 0$

Из $-x + 5 = x - 3$ следи $x = 4$, заједничка тачка правих p_1 и p_2 је $(4, 1)$

ЛЕ у области

$$f'_x = 2x - 4, \quad f'_y = 2y, \quad \text{Стац.т.: } \boxed{A(2,0)}$$

На граници p_3

$$f(0, y) = y^2, \quad \boxed{B(0,0)}$$

На граници p_2

$$\begin{aligned} f(x, x - 3) &= x^2 + (x - 3)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 10x + 9 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 4x - 10, \quad \boxed{C(5/2, -1/2)}$$

На граници p_1

$$\begin{aligned} f(x, -x + 5) &= x^2 + (-x + 5)^2 - 4x \\ &= 2x^2 - 14x + 25 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 4x - 14, \quad \boxed{D(7/2, 3/2)}$$

Заједничке тачке на граници

$$\boxed{E(0,-3)} \quad \boxed{F(0,5)} \quad \boxed{G(4,1)}$$

Вредности функције у издвојеним тачкама

X	A	B	C	D	E	F	G
$f(X)$	-4	0	-7/2	1/2	9	25	1

$$\max_D f = f(F) = 25, \quad \min_D f = f(A) = -4$$

12.6. ЛЕ у области

$$f'_x = \cos x - \cos(x+y), \quad f'_y = \cos y - \cos(x+y)$$

Из $f'_x = 0$ и $f'_y = 0$ следи

$$\cos x - \cos y = 0, \quad y = \pm x + 2k\pi$$

Због $0 < x < 2\pi$ довољно је $y = x$. Тада је

$$\cos x - \cos 2x = 0, \quad 2x = \pm x + 2k\pi$$

Тачке $(2k\pi, 2k\pi)$ не припадају области, а од тачака $(2k\pi/3, 2k\pi/3)$ једино тачка $(2\pi/3, 2\pi/3)$ (за $k = 1$) припада области

Дакле, стац. т. је $A(2\pi/3, 2\pi/3)$

На граници

$$f(0, y) = f(x, 0) = f(x, 2\pi - x) = 0$$

$$\max_{\mathcal{D}} f = f(A) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\min_{\mathcal{D}} f = f(X) = 0$, где је X било која тачка границе